Aufgabe 1

Teilaufgabe a)

Gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 8 \\ 8 & 8 & 29 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Cholesky-Zerlegung $A = \overline{L} \cdot \overline{L}^T$ berechnen

Rechenweg: Entweder mit dem Algorithmus:

Algorithm 1 Cholesky-Zerlegung

```
function CHOLESKY(A ∈ ℝ^{n×n})
    L = { 0 } ∈ ℝ^{n×n}                                  ▷ Initialisiere L
    for (k = 1;  k ≤ n;  k++) do
        L_{k,k} = sqrt( A_{k,k} − Σ_{i=1}^{k−1} L_{k,i}^2 )
        for (i = k + 1;  i ≤ n;  i++) do
            L_{i,k} = ( A_{i,k} − Σ_{j=1}^{k−1} L_{i,j} · L_{k,j} ) / L_{k,k}
        end for
    end for
    return L
end function
```

oder über die LR-Zerlegung:

$$\begin{aligned} A &= L \cdot R && (1)\\ &= L \cdot (D \cdot L^T) && (2)\\ &= L \cdot (D^{\frac{1}{2}} \cdot D^{\frac{1}{2}}) \cdot L^T && (3)\\ &= \underbrace{(L \cdot D^{\frac{1}{2}})}_{=:\overline{L}} \cdot (D^{\frac{1}{2}} \cdot L^T) && (4) \end{aligned}$$

Lösung: $\overline{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe b)

Gesucht: $\det(A)$

Sei $P \cdot A = L \cdot R$, die gewohnte LR-Zerlegung.

Dann gilt:

$$\det(A) = \frac{\det(L) \cdot \det(R)}{\det(P)}$$

$\det(L) = 1$, da alle Diagonalelemente 1 sind und es sich um eine strikte untere Dreiecksmatrix handelt.

$\det(R) = r_{11} \cdot \ldots \cdot r_{nn}$, da es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt.

$\det(P) \in \{ 1, -1 \}$

Das Verfahren ist also:

Algorithm 2 Determinante berechnen

Require: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
  $P, L, R \leftarrow \text{LRZ}\textsc{erl}(A)$
  $x \leftarrow 1$
  for i in $1..n$ **do**
    $x \leftarrow x \cdot r_{ii}$
    $x \leftarrow x \cdot p_{ii}$
  end for

Alternativ kann man auch in einer angepassten LR-Zerlegung direkt die Anzahl an Zeilenvertauschungen zählen. Dann benötigt man P nicht mehr. Ist die Anzahl der Zeilenvertauschungen ungerade, muss das Produkt der $r_i i$ negiert werden.

Aufgabe 2

Voraussetzung: Gegeben sei eine Funktion F:

$$F : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$F(x) := \cos(x)$$

sowie eine Folge $(x)_k$ mit $x_{k+1} := F(x_k)$.

Behauptung: $\exists! x^* : \forall x \in \mathbb{R} : \lim_{k \to \infty} x_k = x^*$

Beweis: über den Banachschen Fixpunktsatz.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$, so gilt:

Teil 1: Fixpunkte können nur in $[0, 1]$ sein.

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

Also genügt es $x \in [-1, 1]$ auf der Suche nach Fixpunkten zu betrachten.

Sei nun $x \in [-1, 0)$. Dann gilt: $\cos(x) > 0$. Da $x < 0$ aber $F(x) > 0$, kann kein Fixpunkt in $[-1, 0)$ sein. Es genügt also sogar, nur $[0, 1]$ zu betrachten.

Sei $0 \leq x < y \leq 1$. Dann folgt:

Teil 2: F ist auf $[0, 1]$ eine Kontraktion

$$\overset{\text{Mittelwertsatz}}{\Rightarrow} \exists L \in (x, y) : \frac{\cos(y) - \cos(x)}{y - x} = f'(L) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \exists L \in [0, 1] : \| \cos y - \cos x \| = \| - \sin(L) \cdot (y - x) \| \quad (6)$$

$$= \underbrace{\sin(L)}_{[0,1)} (y - x) \quad (7)$$

$$\Rightarrow F \text{ ist Kontraktion auf [0,1]} \quad (8)$$

Da $F|_{[0,1]}$ eine Selbstabbildung und eine Kontraktion ist und offensichtlich $[0, 1]$ abgeschlossen ist, greift der Banachsche Fixpunktsatz. Es folgt direkt, dass auch für alle $x \in [0, 1]$ die Folge $(x)_k$ gegen den einzigen Fixpunkt x^* konvergiert. □

Anmerkung

Um zu zeigen, dass es genau einen Fixpunkt x^* in $(0, 1)$ gibt, braucht man den Banachschen Fixpunktsatz nicht. Nur um zu zeigen, dass die Fixpunktiteration auf für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen diesen Fixpunkt x^* konvergiert, braucht man ihn.

So kann man die existenz eines Fixpunktes zeigen:

Offensichtlich ist $F(0) \neq 0$ und $F(1) \neq 1$, also ist der Fixpunkt - falls vorhanden - in $(0,1)$. F ist in $(0,1)$ stetig und streng monoton fallend. Da auch $-x$ in $(0,1)$ streng monoton fallend ist, folgt, dass $\cos(x) - x$ in $(0,1)$ streng monoton fallend ist.

$x = 0 \Rightarrow \cos(x) - x = \cos(0) - 0 = 1$

$x = 45° = \frac{1}{4}\pi < 1 \Rightarrow \cos(45°) - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$, da

$$8 < 9 < \pi^2 \tag{9}$$
$$\Rightarrow \sqrt{8} < \pi \tag{10}$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} < \pi \tag{11}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4} \tag{12}$$

$\overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\Rightarrow} \exists x^* : \cos(x^*) - x^* = 0 \Leftrightarrow \exists x^* : \cos(x^*) = x^*$.

Dieses x^* ist eindeutig, da $\cos(x) - x$ *streng* monoton fallend ist.

Aufgabe 3

Gegeben:

f_i	7	1	-1	7
x_i	-1	0	1	2

Teilaufgabe a)

Allgemein lauten Lagrange-Polynome:

$$L_i = \frac{\overbrace{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}^{\text{Produkt der Nullstellen}}}{\underbrace{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}_{\text{Normalisierungsfaktor}}}$$

Im speziellen:

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x) \tag{13}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2} \cdot (x^3 - 2x^2 - x + 2) \tag{14}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = -\frac{1}{2} \cdot (x^3 - x^2 - 2x) \tag{15}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{1}{6} \cdot (x^3 - x) \tag{16}$$

Durch die Interpolationsformel von Lagrange

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

ergibt sich

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \tag{17}$$

Anmerkung: Es ist nicht notwendig die Monomdarstellung zu berechnen. In diesem Fall hat es jedoch das Endergebnis stark vereinfacht.

Teilaufgabe b)

Für die Berechnung der dividierten Differenzen gilt allgemein:

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_i, \ldots x_{(i+k)-1}] - f[x_{i+1}, \ldots x_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}} \tag{18}$$

In diesem Fall bedeutet das konkret:

$$
\begin{aligned}
f[x_0] &= 7, & f[x_1] &= 1, & f[x_2] &= -1, & f[x_3] &= 7 && (19)\\
f[x_0, x_1] &= -6, & f[x_1, x_2] &= -2, & f[x_2, x_3] &= 8 &&& (20)\\
f[x_0, x_1, x_2] &= 2, & f[x_1, x_2, x_3] &= 5 &&&&& (21)\\
f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= 1 &&&&&&& (22)
\end{aligned}
$$

Insgesamt ergibt sich also

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 7 + (x - \underbrace{(-1)}_{x_0}) \cdot (-6) + (x - \underbrace{(-1)}_{x_0}) \cdot (x - \underbrace{(0)}_{x_1}) \cdot 2 + (x+1) \cdot x \cdot (x-1) && (23)\\
&= 7 - 6(x+1) + 2x(x+1) + x(x+1)(x-1) && (24)
\end{aligned}
$$

(Siehe erste Spalte mit x_0)

Aufgabe 4

Teilaufgabe a)

1. Ordnung 3 kann durch geschickte Gewichtswahl erzwungen werden.
2. Ordnung 4 ist automatisch gegeben, da die QF symmetrisch sein soll.
3. Aufgrund der Symmetrie gilt Äquivalenz zwischen Ordnung 5 und 6. Denn eine hätte die QF Ordnung 5, so wäre wegen der Symmetrie Ordnung 6 direkt gegeben. Ordnung 6 wäre aber bei der Quadraturformel mit 3 Knoten das Maximum, was nur mit der Gauß-QF erreicht werden kann. Da aber $c_1 = 0$ gilt, kann es sich hier nicht um die Gauß-QF handeln. Wegen erwähnter Äquivalenz kann die QF auch nicht Ordnung 5 haben.

Da $c_1 = 0$ gilt, muss $c_3 = 1$ sein (Symmetrie). Und dann muss $c_2 = \frac{1}{2}$ sein. Es müssen nun die Gewichte bestimmt werden um Ordnung 3 zu garantieren mit:

$$b_i = \int_0^1 L_i(x)\mathrm{d}x \tag{25}$$

$$b_1 = \frac{1}{6}, \tag{26}$$

$$b_2 = \frac{4}{6}, \tag{27}$$

$$b_3 = \frac{1}{6} \tag{28}$$

Teilaufgabe b)

Als erstes ist festzustellen, dass es sich hier um die Simpsonregel handelt und die QF

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a) \cdot \frac{1}{6} \cdot \Big(f(a) + 4 \cdot f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \Big) \tag{29}$$

ist. Wenn diese nun auf N Intervalle aufgepflittet wird gilt folgendes:

$$h = \frac{(b-a)}{N} \tag{30}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = h \cdot \frac{1}{6} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} f(a + i \cdot h) + 4 \cdot \sum_{l=0}^{N-1} f(a + \frac{1}{2} \cdot h + l \cdot h) \right] \tag{31}$$

$\sum_{i=1}^{N-1} f(a + i \cdot h)$ steht für die Grenzknoten (deshalb werden sie doppelt gezählt). Von den Grenzknoten gibt es insgesamt $N - 2$ Stück, da die tatsächlichen Integralgrenzen a und b nur einmal in die Berechnung mit einfließen.

$\sum_{l=0}^{N-1} f(a + \frac{1}{2} \cdot h + l \cdot h)$ sind die jeweiligen mittleren Knoten der Intervalle. Davon gibt es N Stück.

Teilaufgabe c)

Diese Aufgabe ist nicht relevant, da Matlab nicht Klausurrelevant ist.

Aufgabe 5

Zunächst ist nach der Familie von Quadraturformeln gefragt, für die gilt: ($p :=$ Ordnung der QF)

$$s = 3 \tag{32}$$

$$0 = c_1 < c_2 < c_3 \tag{33}$$

$$p \geq 4 \tag{34}$$

Nach Satz 29 sind in der Familie genau die QFs, für die gilt:
Für alle Polynome $g(x)$ mit Grad $\leq m - 1 = 0$ gilt:

$$\int_0^1 M(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x = 0 \tag{35}$$

Da eine Quadraturformel höchstens Grad $2s = 6$ (Satz 30) haben kann und es wegen $c_1 = 0$ nicht die Gauss-Quadratur sein kann (Satz 31), kommt nur Ordnung $p = 4$ und $p = 5$ in Frage.

In dieser Aufgabe sind nur die symmetrischen QF, also die von Ordnung $p = 4$ explizit anzugeben. Für die QF von Ordnung $p = 5$ hätte man nur die Gewichte in Abhängigkeit der Knoten darstellen müssen und eine Bedinung nur an die Knoten herleiten müssen.

Ordnung 4

Es gilt $g(x) = c$ für eine Konstante c, da $\mathrm{Grad}(g(x)) = 0$ ist. Also ist 35 gleichbedeutend mit:

$$\int_0^1 M(x) \cdot c \mathrm{d}x = 0 \tag{36}$$

$$\Leftrightarrow c \cdot \int_0^1 M(x) \mathrm{d}x = 0 \tag{37}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 M(x) \mathrm{d}x = 0 \tag{38}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \mathrm{d}x = 0 \tag{39}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot (c_2 + c_3) + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot c_3 = 0 \tag{40}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot c_3}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot c_3} = c_2 \tag{41}$$

Natürlich müssen auch die Gewichte optimal gewählt werden. Dafür wird Satz 28 genutzt:
Sei $b^T = (b_1, b_2, b_3)$ der Gewichtsvektor. Sei zudem $C := \begin{pmatrix} {c_1}^0 & {c_2}^0 & {c_3}^0 \\ {c_1}^1 & {c_2}^1 & {c_3}^1 \\ {c_1}^2 & {c_2}^2 & {c_3}^2 \end{pmatrix}$.

Dann gilt: C ist invertierbar und $b = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Es gibt genau eine symmetrische QF in der Familie. Begründung:
Aus $c_1 = 0$ folgt, dass $c_3 = 1$ ist. Außerdem muss $c_2 = \frac{1}{2}$ sein. Also sind die Knoten festgelegt. Da wir die Ordnung $\geq s = 3$ fordern, sind auch die Gewichte eindeutig.
Es handelt sich um die aus der Vorlesung bekannte Simpsonregel.

Ordnung 5

Es gilt $g(x) = ax + c$ für Konstanten $a \neq 0, c$, da $\mathrm{Grad}(g(x)) = 1$ ist. Also ist 35 gleichbedeutend mit:

$$\int_0^1 M(x) \cdot (ax + c)\mathrm{d}x = 0 \tag{42}$$
$$\Leftrightarrow a \int_0^1 xM(x)\mathrm{d}x + c \int_0^1 M(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{43}$$
$$\Leftrightarrow a \int_0^1 x(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\mathrm{d}x + c \int_0^1 (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\mathrm{d}x = 0 \tag{44}$$
$$\overset{c_1=0}{\Leftrightarrow} a \int_0^1 x^2(x - c_2)(x - c_3)\mathrm{d}x + c \int_0^1 x(x - c_2)(x - c_3)\mathrm{d}x = 0 \tag{45}$$
$$\Leftrightarrow a \left(\frac{c_2 c_3}{3} - \frac{c_2}{4} - \frac{c_3}{4} + \frac{1}{5} \right) + c \left(\frac{c_2 c_3}{2} - \frac{c_2}{3} - \frac{c_3}{3} + \frac{1}{4} \right) = 0 \tag{46}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{c_2 c_3}{3} - \frac{c_2}{4} - \frac{c_3}{4} + \frac{1}{5} \right) + \underbrace{\frac{c}{a}}_{=:d} \left(\frac{c_2 c_3}{2} - \frac{c_2}{3} - \frac{c_3}{3} + \frac{1}{4} \right) = 0 \tag{47}$$

Nun habe ich Wolfram|Alpha lösen lassen:

$$c_2 = \frac{6 - \sqrt{6}}{10} \approx 0.355 \tag{48}$$
$$c_3 = \frac{6 + \sqrt{6}}{10} \approx 0.845 \tag{49}$$

Wegen der Ordnungsbedingungen gilt nun:

$$1 = b_1 + b_2 + b_3 \tag{50}$$

$$\frac{1}{2} = b_2 \cdot \frac{6-\sqrt{6}}{10} + b_3 \cdot \frac{6+\sqrt{6}}{10} \tag{51}$$

$$\frac{1}{3} = b_2 \cdot \left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)^2 + b_3 \cdot \left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right)^2 \tag{52}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} - b_3 \cdot \left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right)^2 = b_2 \cdot \left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)^2 \tag{53}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} - b_3 \cdot \left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right)^2}{\left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)^2} = b_2 \tag{54}$$

$$\Leftrightarrow b_2 = \frac{100}{3 \cdot (6-\sqrt{6})^2} - b_3 \cdot \frac{(6+\sqrt{6})^2}{(6-\sqrt{6})^2} \tag{55}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{100}{3 \cdot (6-\sqrt{6})^2} - b_3 \cdot \frac{(6+\sqrt{6})^2}{(6-\sqrt{6})^2}\right) \cdot \frac{6-\sqrt{6}}{10} + b_3 \cdot \frac{6+\sqrt{6}}{10} \tag{56}$$

$$= \left(\frac{10}{3 \cdot (6-\sqrt{6})} - b_3 \cdot \frac{(6+\sqrt{6})^2}{10 \cdot (6-\sqrt{6})}\right) + b_3 \cdot \frac{6+\sqrt{6}}{10} \tag{57}$$

$$= b_3 \cdot \left(\frac{6+\sqrt{6}}{10} - \frac{(6+\sqrt{6})^2}{10 \cdot (6-\sqrt{6})}\right) + \frac{10}{3 \cdot (6-\sqrt{6})} \tag{58}$$

$$= b_3 \cdot \left(\frac{30-(6+\sqrt{6})^2}{10 \cdot (6-\sqrt{6})}\right) + \frac{10}{3 \cdot (6-\sqrt{6})} \tag{59}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{10}{3 \cdot (6-\sqrt{6})} = b_3 \cdot \left(\frac{30-(6+\sqrt{6})^2}{10 \cdot (6-\sqrt{6})}\right) \tag{60}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \cdot (6-\sqrt{6}) - 20}{6 \cdot (6-\sqrt{6})} = b_3 \cdot \left(\frac{30-(6+\sqrt{6})^2}{10 \cdot (6-\sqrt{6})}\right) \tag{61}$$

$$\Leftrightarrow b_3 = \frac{(3 \cdot (6-\sqrt{6}) - 20) \cdot 10 \cdot (6-\sqrt{6})}{6 \cdot (6-\sqrt{6}) \cdot (30-(6+\sqrt{6})^2)} \tag{62}$$

$$= \frac{(3 \cdot (6-\sqrt{6}) - 20) \cdot 5}{3 \cdot (30-(6+\sqrt{6})^2)} \tag{63}$$

$$= \frac{15 \cdot (6-\sqrt{6}) - 100}{90 - 3 \cdot (6+\sqrt{6})^2} \tag{64}$$

$$\boxed{b_3 = \frac{16-\sqrt{6}}{36}} \approx 0.3764 \tag{65}$$

$$\boxed{b_2 = \frac{16+\sqrt{6}}{36}} \approx 0.5125 \tag{66}$$

$$\overset{\text{Ordnungsbedinung 1}}{\Rightarrow} \boxed{b_1 = \frac{1}{9}} \tag{67}$$

$$\frac{1}{4} \overset{?}{=} \frac{16+\sqrt{6}}{36} \cdot \left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)^3 + \frac{16-\sqrt{6}}{36} \cdot \left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right)^3 \checkmark \tag{68}$$

$$\frac{1}{5} \overset{?}{=} \frac{16+\sqrt{6}}{36} \cdot \left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)^4 + \frac{16-\sqrt{6}}{36} \cdot \left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right)^4 \checkmark \tag{69}$$

$$\frac{1}{6} \overset{?}{=} \frac{16+\sqrt{6}}{36} \cdot \left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)^5 + \frac{16-\sqrt{6}}{36} \cdot \left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right)^5 = \frac{33}{200} \times \tag{70}$$