Geometrie und Topologie

Siehe GitHub

23. Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

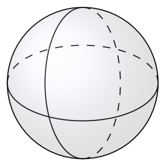
Dieses Skript wird/wurde im Wintersemester 2013/2014 geschrieben. Es beinhaltet Vorlesungsnotizen von Studenten zur Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich.

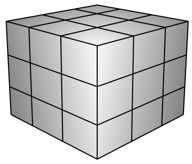
Es darf jeder gerne Verbesserungen einbringen!

I. Topologische Grundbegriffe

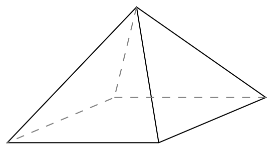
I.1. Vorgeplänkel

Die Kugeloberfläche S^2: lässt sich zu: oder: verformen:

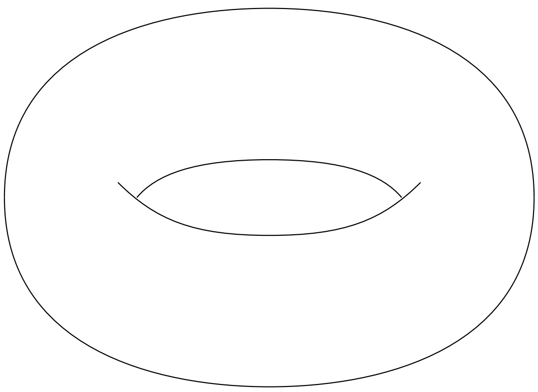




TODO



aber nicht zum $\mathbb{R}^2$ oder zu einem Torus:



I.2. Topologische Räume

Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathfrak{T})$ bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

(ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$

(iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen **offene Teilmengen** von X.

$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B. $[0, 1)$.

Beispiel 1

1) $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik.

   $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Leftrightarrow$ für jedes $x \in U$ gibt es $r > 0$, sodass $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) < r \} \subseteq U$
   Also: $\mathfrak{T} = \{ M \subseteq X \mid M \text{ ist offene Kugel} \}$

2) Allgemeiner: (X, d) metrischer Raum

3) X Menge, $\mathfrak{T} = \{ \emptyset, X \}$ heißt „triviale Topologie“

4) X Menge, $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$ heißt „diskrete Topologie“

5) $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset \}$ heißt „Zariski-Topologie“
   Beobachtung: $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X]$, sodass $\mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$

6) $X := \mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_Z = \{U \subseteq \mathbb{R}^n | \text{Es gibt Polynome } f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ sodass } \mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \dots, f_r)\}$

7) $X = \{ 0, 1 \}, \mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0 \} \}$
   abgeschlossene Mengen: $\emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 1 \}$

Definition 2

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x, wenn es ein $U_0 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U$.

Definition 3

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

a) $M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$ heißt **Inneres** oder **offener Kern** von M.

b) $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von M.

c) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von M.

d) M heißt **dicht** in X, wenn $\overline{M} = X$ ist.

Beispiel 2

1) $X = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie
   $M = \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}, \quad M^\circ = \emptyset$

2) $X = \mathbb{R}$, $M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = [a, b]$

3) $X = \mathbb{R}, \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$
   $M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}$

Definition 4

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

a) $B \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathfrak{T}$, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von Elementen aus B ist.

b) $B \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Subbasis**, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von endlich vielen Durchschnitten von Elementen aus B ist.

Beispiel 3

$X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Topologie und

$$B = \{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n \}$$

ist eine Basis.

Bemerkung 1

Sei X eine Menge und $B \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathfrak{T}$ auf X, für die B Subbasis ist.

Definition 5

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$.
$\mathfrak{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \}$ ist eine Topologie auf Y.

$\mathfrak{T}_Y$ heißt **Spurtopologie** und $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ heißt ein **Teilraum** von $(X, \mathfrak{T})$

Stichwortverzeichnis