Analysis III - Bachelorversion

Die Mitarbeiter von mitschriebwiki.nomeata.de und GitHub

15. Oktober 2012

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Über dieses Skriptum

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung „Analysis III“ von Herrn Schmoeger im Wintersemester 2010 an der Universität Karlsruhe (KIT). Die Mitschriebe der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Herrn Schmoeger hier veröffentlicht, Herr Schmoeger ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

Wer

Gestartet wurde das Projekt von Joachim Breitner. Beteiligt an diesem Mitschrieb sind Rebecca Schwerdt, Philipp Ost, Jan Ihrens, Peter Pan und Benjamin Unger.

Im September 2012 wurde das Skript mit der Revisionsnummer 7132 von mitschriebwiki auf GitHub hochgeladen.

Wo

Alle Kapitel inklusive LaTeX-Quellen können unter mitschriebwiki.nomeata.de abgerufen werden. Dort ist ein Wiki eingerichtet und von Joachim Breitner um die LaTeX-Funktionen erweitert. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über Subversion möglich.

Oder man geht auf github, erstellt einen Fork und kann direkt Änderungen umsetzen.

§ 0 Vorbereitungen

In diesem Paragraphen seien X, Y, Z Mengen ($\neq \emptyset$) und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(1) (i) $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subseteq X\}$ heißt **Potenzmenge** von X.

(ii) Sei $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$, so heißt $\mathfrak{M}$ **disjunkt**, genau dann wenn $A \cap B = \emptyset$ für $A, B \in \mathfrak{M}$ mit $A \neq B$.

(iii) Sei (A_j) eine Folge in $\mathcal{P}(X)$ (also $A_j \subseteq X$), so heißt (A_j) **disjunkt**, genau dann wenn $\{A_1, A_2, \ldots\}$ disjunkt ist.
Schreibweise:

$$\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j := \bigcup A_j$$
$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j := \bigcap A_j$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j =: \sum a_j$$

(2) Sei $A \subseteq X$, $\mathbb{1}_A : X \to R$ definiert durch:

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \in A^c \end{cases}$$

wobei $A^c := X \setminus A$. $\mathbb{1}_A$ heißt die **charakteristische Funktion** oder **Indikatorfunktion von A**.

(3) Sei $B \subseteq Y$ dann ist $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ und es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$

(ii) Ist B_j eine Folge in $\mathcal{P}(Y)$, so gilt:

$$f^{-1}(\bigcup B_j) = \bigcup f^{-1}(B_j)$$
$$f^{-1}(\bigcap B_j) = \bigcap f^{-1}(B_j)$$

(iii) Ist $C \subseteq Z$, so gilt:

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$$

§ 1 σ-Algebren und Maße

In diesem Paragraphen sei $X \neq \emptyset$ eine Menge.

Definition
Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathfrak{A}$ heißt eine σ**-Algebra** auf X, wenn gilt:

(σ_1) $X \in \mathfrak{A}$

(σ_2) Ist $A \in \mathfrak{A}$, so ist auch $A^c \in \mathfrak{A}$.

(σ_3) Ist (A_j) eine Folge in $\mathfrak{A}$, so ist $\bigcup A_j \in \mathfrak{A}$.

Beispiele:

(1) $\{ X, \emptyset \}$ und $\mathcal{P}(X)$ sind σ-Algebren auf X.

(2) Sei $A \subseteq X$, dann ist $\{ X, \emptyset, A, A^c \}$ eine σ-Algebra auf X.

(3) $\mathfrak{A} := \{ A \subseteq X \mid A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar} \}$ ist eine σ-Algebra auf X.

Lemma 1.1
Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X, dann:

(1) $\emptyset \in \mathfrak{A}$

(2) Ist (A_j) eine Folge in $\mathfrak{A}$, so ist $\bigcap A_j \in \mathfrak{A}$.

(3) Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$, so gilt:

   (i) $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathfrak{A}$

   (ii) $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathfrak{A}$

   (iii) $A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{A}$

Beweis

(1) $\overset{\sigma_2}{\Longrightarrow}$ $\emptyset = X^c \in \mathfrak{A}$.

(2) $D := \bigcap A_j$. $D^c = \bigcup A_j^c \in \mathfrak{A}$ (nach (σ_2) und (σ_3)), also gilt auch $D = (D^c)^c \in \mathfrak{A}$.

(3) (i) $\xRightarrow{(\sigma_3) \text{ mit } A_{n+j} := \emptyset \ (j \geq 1)}$ $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathfrak{A}$.

   (ii) $\xRightarrow{(2) \text{ mit } A_{n+j} := X \ (j \geq 1)}$ $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathfrak{A}$.

   (iii) $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c \in \mathfrak{A}$ ■

Lemma 1.2
Sei $\mathcal{F} \neq \emptyset$ eine Menge von σ-Algebren auf X. Dann ist

$$\mathfrak{A}_0 := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{F}} \mathfrak{A}$$

eine σ-Algebra auf X.

Beweis

(σ_1) $\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{F} : X \in \mathfrak{A} \implies X \in \mathfrak{A}_0$.

(σ_2) Sei $A \in \mathfrak{A}_0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{F} : A \in \mathfrak{A} &\implies \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{F} : A^c \in \mathfrak{A} \\ &\implies A^c \in \mathfrak{A}_0 \end{aligned}$$

(σ_3) Sei (A_j) eine Folge in $\mathfrak{A}_0$, dann ist (A_j) Folge in $\mathfrak{A}$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{F}$, dann gilt:

$$\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{F} : \bigcap A_j \in \mathfrak{A} \implies \bigcap A_j \in \mathfrak{A}_0$$ ■

Definition
Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{F} := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathfrak{A}\}$. Definiere

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{F}} \mathfrak{A}$$

$\overset{1.2}{\implies}$ $\sigma(\mathcal{E})$ ist eine σ-Algebra auf X. $\sigma(\mathcal{E})$ heißt die **von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra**. $\mathcal{E}$ heißt ein **Erzeuger** von $\sigma(\mathcal{E})$.

Lemma 1.3
Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(1) $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. $\sigma(\mathcal{E})$ ist die „kleinste“ σ-Algebra auf X, die $\mathcal{E}$ enthält.

(2) Ist $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra, so ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

(3) Ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$, so ist $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$.

Beweis

(1) Klar nach Definition.

(2) $\mathfrak{A} := \mathcal{E}$, dann gilt $\mathfrak{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{A}$.

(3) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}' \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$, also folgt nach Definition $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$. ■

Beispiel

(1) Sei $A \subseteq X$ und $\mathcal{E} := \{A\}$. Dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \{X, \emptyset, A, A^c\}$.

(2) $X := \{1,2,3,4,5\}, \mathcal{E} := \{\{1\},\{1,2\}\}$. Dann gilt:

$$\sigma(\mathcal{E}) := \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}\}$$

Erinnerung: Sei $d \in \mathbb{N}, X \subseteq \mathbb{R}^d$. $A \subseteq X$ heißt **offen** (**abgeschlossen**) in X, genau dann wenn ein offenes (abgeschlossenes) $G \subseteq \mathbb{R}^d$ existiert mit $A = X \cap G$.
Beachte: A abgeschlossen in $X \iff X \setminus A$ offen in X.

Definition
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$.

(1) $\mathcal{O}(X) := \{\ A \subseteq X \mid A \text{ ist offen in } X\ \}$

(2) $\mathfrak{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}(X))$ heißt **Borelsche σ-Algebra** auf X.

(3) $\mathfrak{B}_d := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$. Die Elemente von $\mathfrak{B}_d$ heißen **Borelsche Mengen** oder **Borel-Mengen**.

Beispiel

(1) Sei $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^d$. Ist $A \subseteq$ $\overset{\text{offen}}{\text{abgeschlossen}}$ in X, so ist $A \in \mathfrak{B}(X)$.

(2) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^d$ $\overset{\text{offen}}{\text{abgeschlossen}}$, so ist $A \in \mathfrak{B}_d$.

(3) Sei $d = 1, A = \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, also $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ (mit $r_i \neq r_j$ für $i \neq j$). Also ist $\mathbb{Q} = \bigcup\{r_j\}$. Sei nun $r \in \mathbb{Q}$, dann ist $B := (-\infty, r) \cup (r, \infty) \in \mathfrak{B}_1$. Daraus folgt $\{r_j\} \in \mathfrak{B}_1$, also auch $\mathbb{Q} \in \mathfrak{B}_1$.
Allgemeiner lässt sich zeigen: $\mathbb{Q}^d := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{Q}(j = 1, \ldots, n)\} \in \mathfrak{B}_d$.

(4) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^d, \{\ x_0\ \}$ ist abgeschlossen $\Rightarrow \{\ x_0\ \} \in \mathfrak{B}$

Definition

(1) Seien $I_1, \ldots, I_d$ Intervalle in $\mathbb{R}$. $I_1 \times \cdots \times I_d$ heißt ein **Intervall** in $\mathbb{R}^d$.

(2) Seien $a = (a_1, \ldots, a_d), b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$.

$$a \leq b :\iff a_j \leq b_j \quad (j = 1, \ldots, d)$$

(3) Seien $a, b \in \mathbb{R}^d$ und $a \leq b$.

$$\begin{aligned}(a,b) &:= (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_d,b_d)\\ (a,b] &:= (a_1,b_1] \times \cdots \times (a_d,b_d]\\ [a,b) &:= [a_1,b_1) \times \cdots \times [a_d,b_d)\\ [a,b] &:= [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_d,b_d]\end{aligned}$$

mit der Festlegung $(a,b) := (a,b] := [a,b) := \emptyset$, falls $a_j = b_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, d\}$.

(4) Für $k \in \{1, \ldots, d\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere die folgenden **Halbräume**:

$$\begin{aligned}H_k^-(\alpha) &:= \left\{\ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_k \leq \alpha\ \right\}\\ H_k^+(\alpha) &:= \left\{\ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_k \geq \alpha\ \right\}\end{aligned}$$

Satz 1.4 (Erzeuger der Borelschen σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$)
Es seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &:= \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}\\ \mathcal{E}_2 &:= \{(a,b] : a,b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}\\ \mathcal{E}_3 &:= \{H_k^-(\alpha) : \alpha \in \mathbb{Q}, k = 1, \dots, d\}\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3)$$

Entsprechendes gilt für die anderen Typen von Intervallen und Halbräumen.

Beweis

(1) Sei $G \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d), \mathfrak{M} := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b, (a,b) \subseteq G\}$. Dann ist $\mathfrak{M}$ abzählbar und $G = \bigcup_{I \in \mathfrak{M}} I$. Also gilt:

$$G \in \sigma(\mathcal{E}_1) \implies \mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$$

(2) Sei $(a,b) \in \mathcal{E}_1$.
Fall 1: $(a,b) = \emptyset \in \mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$
Fall 2: $(a,b) \neq \emptyset, a = (a_1 \dots, a_d), b = (b_1 \dots, b_d)$.
Dann gilt für alle $j \in \{1, \dots, d\} : a_j < b_j$. Also gilt auch:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall j \in \{1, \dots, d\} : a_j < b_j - \frac{1}{n}$$

Definiere $c_n := (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \in \mathbb{Q}^d$. Dann gilt:

$$(a,b) = \bigcup_{n \geq N} (a, b - c_n] \in \sigma(\mathcal{E}_2)$$

Also auch $\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$ und damit $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$.

(3) Seien $a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{Q}^d$ mit $a \leq b$. Nachrechnen:

$$(a,b] = \bigcap_{k=1}^{d} (H_k^-(b_k) \cap H_k^-(a_k)^c) \in \sigma(\mathcal{E}_3).$$

Das heißt $\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$ und damit auch $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$.

(4) $H_k^-(\alpha)$ ist abgeschlossen, somit ist $H_k^-(\alpha)^c$ offen und damit $H_k^-(\alpha)^c \in \mathfrak{B}_d$, also auch $H_k^-(\alpha) \in \mathfrak{B}_d$. Damit ist $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathfrak{B}_d \implies \sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \mathfrak{B}_d$. ■

Definition
Sei $\emptyset \neq \mathfrak{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

$$\mathfrak{M}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathfrak{M}\}$$

heißt die **Spur von $\mathfrak{M}$ in** Y.

Satz 1.5 (Spuren und σ-Algebren)
Sei $\emptyset \neq Y \subseteq X$ und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X.

(1) $\mathfrak{A}_Y$ ist eine σ-Algebra auf Y.

(2) $\mathfrak{A}_Y \subseteq \mathfrak{A} \iff Y \in \mathfrak{A}$

(3) Ist $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, so ist $\sigma(\mathcal{E}_Y) = \sigma(\mathcal{E})_Y$.

Beweis

(1) (σ_1) Es ist $Y = Y \cap X \in \mathfrak{A}_Y$, da $X \in \mathfrak{A}$.

(σ_2) Sei $B \in \mathfrak{A}_Y$, dann existiert ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $B = A \cap Y$. Also ist $Y \setminus B = (X \setminus A) \cap Y \in \mathfrak{A}_Y$, da $X \setminus A \in \mathfrak{A}$ ist.

(σ_3) Sei (B_j) eine Folge in $\mathfrak{A}_Y$, dann existiert eine Folge $(A_j) \in \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ mit $B_j = A_j \cap Y$. Es gilt:

$$\bigcup B_j = \bigcup (A_j \cap Y) = (\bigcup A_j) \cap Y \in \mathfrak{A}_Y$$

(2) Der Beweis erfolgt durch Implikation in beiden Richtungen:

„$\Longrightarrow$“ Es gilt $Y \in \mathfrak{A}_Y \subseteq \mathfrak{A}$.

„$\Longleftarrow$“ Sei $B \in \mathfrak{A}_Y$, dann existiert ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $B = A \cap Y \in \mathfrak{A}$.

(3) Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) &\Longrightarrow \mathcal{E}_Y \subseteq \sigma(\mathcal{E})_Y \\ &\Longrightarrow \sigma(\mathcal{E}_Y) \subseteq \sigma(\mathcal{E})_Y \end{aligned}$$

Sei nun:

$$\mathcal{D} := \{A \subseteq X : A \cap Y \in \sigma(\mathcal{E}_Y)\}$$

Übung: $\mathcal{D}$ ist eine σ-Algebra auf X.
Sei $E \in \mathcal{E}$ dann ist $E \cap Y \in \mathcal{E}_Y \subseteq \sigma(\mathcal{E}_Y)$ also $E \in \mathcal{D}$ und damit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{E})_Y &\subseteq \sigma(\mathcal{D})_Y = \mathcal{D}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{D}\} \\ &\subseteq \sigma(\mathcal{E}_Y) \end{aligned}$$

■

Folgerungen 1.6
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann gilt:

(1) $\mathfrak{B}(X) = (\mathfrak{B}_d)_X$

(2) Ist $X \in \mathfrak{B}_d$, so ist $\mathfrak{B}(X) = \{A \in \mathfrak{B}_d : A \subseteq X\} \subseteq \mathfrak{B}_d$.

Definition
Wir fügen $\mathbb{R}$ das Symbol $+\infty$ hinzu. Es soll gelten:

(1) $\forall a \in \mathbb{R} : a < +\infty$

(2) $\pm a + (+\infty) := +\infty =: (+\infty) \pm a$

(3) $(+\infty) + (+\infty) := +\infty$

Sei etwa $[0, +\infty] := [0, \infty) \cup \{+\infty\}$.

(1) Sei (x_n) eine Folge in $[0, +\infty]$. Es gilt:

$$x_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty :\iff \forall c > 0 \exists n_c \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_c : x_n > c$$

(2) Sei (a_n) eine Folge in $[0, +\infty]$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n = +\infty$$

genau dann wenn $a_j = +\infty$ für ein $j \in \mathbb{N}$ oder, falls alle $a_j < +\infty$, wenn $\sum a_n$ divergiert.

Wegen 13.1 Ana I können Reihen der obigen Form beliebig umgeordnet werden, ohne dass sich ihr Wert verändert.

Definition
Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X und $\mu : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ eine Abbildung. μ heißt ein **Maß** auf $\mathfrak{A}$, genau dann wenn gilt:

(M_1) $\mu(\emptyset) = 0$

(M_2) Ist (A_j) eine disjunkte Folge in $\mathfrak{A}$, so ist $\mu(\bigcup A_j) = \sum \mu(A_j)$. Diese Eigenschaft heißt **σ-Additivität**.

Ist μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$, so heißt $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein **Maßraum**.
Ein Maß μ heißt **endlich**, genau dann wenn $\mu(X) < \infty$. Ein Maß μ heißt ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**, genau dann wenn $\mu(X) = 1$ ist.

Beispiel
(1) Sei $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(X)$ und $x_0 \in X$. $\delta_{x_0} : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ sei definiert durch:

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$$

Klar ist, dass $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$ ist.
Sei (A_j) eine disjunkte Folge in $\mathfrak{A}$.

$$\delta_{x_0}(\bigcup A_j) = \left.\begin{cases} 1, & x_0 \in \bigcup A_j \\ 0, & x_0 \notin \bigcup A_j \end{cases}\right\} = \sum \delta_{x_0}(A_j)$$

δ_{x_0} ist ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ und heißt **Punktmaß** oder **Dirac-Maß**.

(2) Sei $X := \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} := \mathcal{P}(X)$ und (p_j) eine Folge in $[0, +\infty]$. Definiere $\mu : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ durch:

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ \sum_{j\in A} p_j & , A \neq \emptyset \end{cases}$$

Übung: μ ist ein Maß auf $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und heißt ein **Zählmaß**. Sind alle $p_j = 1$, so ist $\mu(A)$ gerade die Anzahl der Elemente von A.

(3) Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\emptyset \neq Y \subseteq X$ und $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Y. Definiere $\mu_0 : \mathfrak{A}_0 \to [0, +\infty]$ durch $\mu_0(A) := \mu(A)$ $(A \in \mathfrak{A}_0)$. Dann ist $(Y, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ ein Maßraum.
Ist spezieller $Y \in \mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}_0 := \mathfrak{A}_Y \subseteq \mathfrak{A}$ und man definiert $\mu_{|Y} : \mathfrak{A}_Y \to [0, +\infty]$ durch $\mu_{|Y}(A) := \mu(A)$.

Satz 1.7
$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum, es seien $A, B \in \mathfrak{A}$ und (A_j) sei eine Folge in $\mathfrak{A}$. Dann:

(1) $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

(2) Ist $\mu(A) < \infty$ und $A \subseteq B$, $\implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(3) Ist μ endlich, dann ist $\mu(A) < \infty$ und $\mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A)$

(4) $\mu\left(\bigcup A_j\right) \leq \sum \mu(A_j)$ (σ-Subadditivität)

(5) Ist $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$, so ist $\mu(\bigcup A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

(6) Ist $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ und $\mu(A) < \infty$, so ist $\mu(\bigcap A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

Beweis

(1)-(3) $B = (B \setminus A) \cup A$. Dann: $\mu(B) = \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A)$

(4) $B_1 = A_1$, $B_k := A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \quad (k \geq 2)$

Dann: $B_j \in \mathfrak{A}$, $B_j \subseteq A_j$ $(j \in \mathbb{N})$; (B_j) disjunkt und $\bigcup A_j = \bigcup B_j$. Dann:

$$\mu\left(\bigcup A_j\right) = \mu\left(\bigcup B_j\right) = \sum \underbrace{\mu(B_j)}_{\leq \mu(A_j)} \leq \sum \mu(A_j)$$

(5) $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ $(k \geq 2)$

Dann: $B_j \subseteq \mathfrak{A}$; $B_j \subseteq A_j$ $(j \in \mathbb{N})$; $\bigcup A_j = \bigcup B_j$ und $A_n = \bigcup_{j=1}^n B_j$

Dann: $\mu(\bigcup A_j) = \mu(\bigcup B_j) = \sum \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)}_{=\mu\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right) = \mu(A_n)}$

(6) Übung ■

§ 2 Das Lebesguemaß

In diesem Kapitel sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$.

Definition
Sei $\emptyset \neq \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathfrak{R}$ heißt ein **Ring** (auf X), genau dann wenn gilt:

(1) $\emptyset \in \mathfrak{R}$

(2) $A, B \in \mathfrak{R} \implies A \cup B,\, B \setminus A \in \mathfrak{R}$

Definition
Sei $d \in \mathbb{N}$.

(1) $\mathcal{I}_d := \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}^d,\, a \leq b\}$. Seien $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ und $I := (a,b] \in \mathcal{I}_d$

$$\lambda_d(I) = \begin{cases} 0 & \text{falls } I = \emptyset \\ (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d) & \text{falls } I \neq \emptyset \end{cases} \quad (\textbf{Elementarvolumen})$$

(2) $\mathcal{F}_d := \left\{ \bigcup_{j=1}^n I_j \mid n \in \mathbb{N},\, I_1, \dots, I_n \in I_d \right\}$ (**Menge der Figuren**)

Ziel dieses Kapitels: Fortsetzung von λ_d auf $\mathcal{F}_d$ und dann auf $\mathfrak{B}_d$ ($\rightsquigarrow$ Lebesguemaß)

Beachte: $\mathcal{I}_d \subseteq \mathcal{F}_d \subseteq \mathfrak{B}_d \overset{1.4}{\implies} \mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{I}_d) = \sigma(\mathcal{F}_d)$

Lemma 2.1
Seien $I, I' \in \mathcal{I}_d$ und $A \in \mathcal{F}_d$. Dann:

(1) $I \cap I' \in \mathcal{I}_d$

(2) $I \setminus I' \in \mathcal{F}_d$. Genauer: $\exists \{I_1', \dots, I_l'\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt: $I \setminus I' = \bigcup_{j=1}^l I_j'$

(3) $\exists \{I_1', \dots, I_l'\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt: $A = \bigcup_{j=1}^l I_j'$

(4) $\mathcal{F}_d$ ist ein Ring.

Beweis

(1) Sei $I = \prod_{k=1}^d (a_k, b_k]$, $I' = \prod_{k=1}^d (\alpha_k, \beta_k]$; $\alpha_k' := \max\{\alpha_k, a_k\}$, $\beta_k' := \min\{\beta_k, b_k\}$

Ist $\alpha_k' \geq \beta_k'$ für ein $k \in \{1, \dots, d\}$, so ist $I \cap I' = \emptyset \in \mathcal{I}_d$. Sei $\alpha_k' < \beta_k' \forall k \in \{1, \dots, d\}$, so ist $I \cap I' = \prod_{k=1}^d (\alpha_k', \beta_k'] \in \mathcal{I}_d$

(2) Induktion nach d:

I.A. Klar ✓

I.V. Die Behauptung gelte für ein $d \geq 1$

I.S. Seien $I, I' \in \mathcal{I}_{d+1}$. Es existieren $I_1, I_1' \in \mathcal{I}_1$ und $I_2, I_2' \in \mathcal{I}_d$ mit: $I = I_1 \times I_2$, $I' = I_1' \times I_2'$

Nachrechnen:

$$I \setminus I' = (I_1 \setminus I_1') \times I_2 \dot{\cup} (I_1 \cap I_1') \times (I_2 \setminus I_2')$$

I.A. $\implies$ $I_1 \setminus I_1'$ = endliche disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{I}_1$
I.V. $\implies$ $I_2 \setminus I_2'$ = endliche disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{I}_d$
Daraus folgt die Behauptung für $d + 1$

(3) Wir zeigen mit Induktion nach n: ist $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$ mit $I_1, \ldots, I_d \in \mathcal{I}_d$, so existiert $\{I_1', \ldots, I_l'\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt: $A = \bigcup_{j=1}^l I_j'$

I.A. $n = 1: \; A = I_1$✓

I.V. Die Behauptung gelte für ein $n \geq 1$

I.S. Sei $A = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \quad (I_1, \ldots, I_{n+1} \in \mathcal{I}_d)$

IV $\implies$ $\exists \{I_1', \ldots, I_l'\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt: $\bigcup_{j=1}^n I_j = \bigcup_{j=1}^l I_j'$

Dann: $A = I_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^l I_j' = I_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^l (I_j' \setminus I_{n+1})$

Wende (2) auf jedes $I_j' \setminus I_{n+1}$ an ($j = 1, \ldots, l$): $I_j' \setminus I_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{l_j} I_j'' \quad (I_j'' \in \mathcal{I}_d)$

Damit folgt:

$$A = I_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^{l} \left(\bigcup_{j=1}^{l_j} I_j'' \right)$$

Daraus folgt die Behauptung für $n + 1$.

(4) $(a, a] = \emptyset \implies \emptyset \in \mathcal{F}_d$

Seien $A, B \in \mathcal{F}_d$. Klar: $A \cup B \in \mathcal{F}_d$

Sei $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$, $B = \bigcup_{j=1}^n I_j' \quad (I_j, I_j' \in \mathcal{I}_d)$. Zu zeigen: $B \setminus A \in \mathcal{F}_d$

I.A. $n = 1: \; A = I_1 \implies B \setminus A = \bigcup_{j=1}^n \underbrace{(I_j' \setminus I_j)}_{\in \mathcal{F}_d}$. Wende (2) auf jedes $I_j' \setminus I_1$ an. Aus (2) folgt dann $B \setminus A \in \mathcal{F}_d$.

I.V. Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

I.S. Sei $A' = A \cup I_{n+1} \quad (I_{n+1} \in \mathcal{I}_d)$. Dann:

$$B \setminus A' = \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{F}_d} \setminus \underbrace{I_{n+1}}_{\in \mathcal{F}_d} \in \mathcal{F}_d$$

■

Lemma 2.2
Sei $A \in \mathcal{F}_d$ und $\{I_1, \dots, I_n\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt und $\{I'_1, \dots, I'_m\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt mit $\bigcup_{j=1}^n I_j = A = \bigcup_{j=1}^m I'_j$. Dann:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j) = \sum_{j=1}^m \lambda_d(I'_j)$$

Definition
Sei $A \in \mathcal{F}_d$ und $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$ mit $\{I_1, \dots, I_n\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt (beachte Lemma 2.1, Punkt 3).

$$\lambda_d(A) := \sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j)$$

Wegen Lemma 2.2 ist $\lambda_d : \mathcal{F}_d \to [0, \infty)$ wohldefiniert.

Satz 2.3
Seien $A, B \in \mathcal{F}_d$ und (B_n) sei eine Folge in $\mathcal{F}_d$.

(1) $A \cap B = \emptyset \implies \lambda_d(A \cup B) = \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$

(2) $A \subseteq B \implies \lambda_d(A) \leq \lambda_d(B)$

(3) $\lambda_d(A \cup B) \leq \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$

(4) Sei $\delta > 0$. Es existiert $C \in \mathcal{F}_d : \overline{C} \subseteq B$ und $\lambda_d(B \setminus C) \leq \delta$.

(5) Ist $B_{n+1} \subseteq B_n \forall n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap B_n = \emptyset$, so gilt: $\lambda_d(B_n) \to 0 \, (n \to \infty)$

Beweis

(1) Aus Lemma 2.1 folgt: Es existiert $\{I_1, \dots, I_n\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt und es existiert $\{I'_1, \dots, I'_m\} \subseteq \mathcal{I}_d$ disjunkt: $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$, $B = \bigcup_{j=1}^m I'_j$.

$J := \{I_1, \dots, I_n, I'_1, \dots, I'_m\} \subseteq \mathcal{I}_d$. Aus $A \cap B = \emptyset$ folgt: J ist disjunkt. Dann: $A \cup B = \bigcup_{I \in J} I$

Also:

$$\begin{aligned}
\lambda_d(A \cup B) &= \sum_{I \in J} \lambda_d(I) \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j) + \sum_{j=1}^m \lambda_d(I'_j) \\
&= \lambda_d(A) + \lambda_d(B)
\end{aligned}$$

(2) wie bei Satz 1.7

(3) $\lambda_d(A \cup B) = \lambda(A \cup (B \setminus A)) \overset{(1)}{=} \lambda_d(A) + \lambda_d(B \setminus A) \overset{(2)}{\leq} \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$

(4) Übung; es genügt zu betrachten: $B \in \mathcal{I}_d$

(5) Sei $\varepsilon > 0$. Aus (4) folgt: Zu jedem B_n existiert ein $C_n \in \mathcal{F}_d : \overline{C}_n \subseteq B_n$ und

$$\lambda_d(B_n \setminus C_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{2.1}$$

Dann: $\bigcap \overline{C}_n \subseteq \bigcap B_n = \emptyset \implies \bigcup \overline{C}_n^c = \mathbb{R}^d \implies \underbrace{\overline{B}_1}_{\text{kompakt}} \subseteq \bigcup \underbrace{\overline{C}_n^c}_{\text{offen}}$

Aus der Definition von Kompaktheit (Analysis II, §2) folgt: $\exists m \in \mathbb{N} : \bigcup_{j=1}^m \overline{C}_j^c \supseteq \overline{B}_1$ Dann: $\bigcap_{j=1}^m \overline{C}_j \subseteq \overline{B}_1^c$. Andererseits: $\bigcap_{j=1}^m \overline{C}_j \subseteq \bigcap_{j=1}^m B_j \subseteq B_1 \subseteq \overline{B}_1$.

Also: $\bigcap_{j=1}^m \overline{C}_j = \emptyset$. Das heißt: $\bigcap_{j=1}^n \overline{C}_j = \emptyset \, \forall n \geq m$

$D_n := \bigcap_{j=1}^n C_j$. Dann: $D_n = \emptyset \, \forall n \geq m$

Behauptung: $\lambda_d(B_n \setminus D_n) \leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \varepsilon \, \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis
I.A. $\lambda_d(B_1 \setminus D_1) = \lambda_d(B_1 \setminus C_1) \overset{(2.1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \varepsilon$ ✓

I.V. Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

I.S.

$$\begin{aligned}
\lambda_d(B_{n+1} \setminus D_{n+1}) &= \lambda_d\left((B_{n+1} \setminus D_n) \cup (B_{n+1} \setminus C_{n+1})\right) \\
&\overset{(3)}{\leq} \lambda_d(\underbrace{B_{n+1} \setminus D_n}_{\subseteq B_n \setminus D_n}) + \underbrace{\lambda_d(B_{n+1} \setminus C_{n+1})}_{\overset{(2.1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}} \\
&\overset{(2)}{\leq} \lambda_d(B_n \setminus D_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\
&\overset{\text{I.V.}}{\leq} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \varepsilon
\end{aligned}$$

■

Für $n \geq m : \; D_n = \emptyset \implies \lambda_d(B_n) = \lambda_d(B_n \setminus D_n) \leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \varepsilon \leq \varepsilon$ ■

Definition
Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring auf X. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt ein **Prämaß** auf $\mathfrak{R}$, wenn gilt:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) Ist A_j eine disjunkte Folge in $\mathfrak{R}$ und $\bigcup A_j \in \mathfrak{R}$, so ist $\mu\left(\bigcup A_j\right) = \sum \mu(A_j)$.

Satz 2.4
$\lambda_d : \mathcal{F}_d \to [0, \infty]$ ist ein Prämaß.

Beweis

(1) Klar: $\lambda_d(\emptyset) = 0$

(2) Sei A_j eine disjunkte Folge in $\mathcal{F}_d$ und $A := \bigcup A_j \in \mathcal{F}_d$.

$B_n := \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$ $(n \in \mathbb{N})$; (B_n) hat die Eigenschaften aus 2.3, Punkt 5. Also: $\lambda_d(B_n) \to 0$.

Für $n \geq 2$:

$$\lambda_d(A) = \lambda_d(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup B_n) \overset{2.3.(1)}{=} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_d(A_j) + \lambda_d(B_n)$$

Daraus folgt:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_d(A_j) = \lambda_d(A) - \lambda_d(B_n) \quad \forall n \geq 2$$

Mit $n \to \infty$ folgt die Behauptung. ■

Satz 2.5 (Fortsetzungssatz von Carathéodory)
Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring auf X und $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß. Dann existiert ein Maßraum $(X, \mathfrak{A}(\mu), \overline{\mu})$ mit

(1) $\sigma(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{A}(\mu)$

(2) $\overline{\mu}(A) = \mu(A) \, \forall A \in \mathfrak{R}$

Insbesondere: $\overline{\mu}$ ist ein Maß auf $\sigma(\mathfrak{R})$.

Satz 2.6 (Eindeutigkeitssatz)
Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, es seien ν, μ Maße auf $\sigma(\mathcal{E})$ und es gelte: $\mu(E) = \nu(E) \, \forall E \in \mathcal{E}$.

Weiter gelten:

(1) $E, F \in \mathcal{E} \implies E \cap F \in \mathcal{E}$ (durchschnittstabil)

(2) Es existiert eine Folge (E_n) in $\mathcal{E}$: $\bigcup E_n = X$ und $\mu(E_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann: $\mu = \nu$ auf $\sigma(\mathcal{E})$.

Satz 2.7
Es gibt genau eine Fortsetzung von $\lambda_d : \mathcal{F}_d \to [0, \infty]$ auf $\mathfrak{B}_d$ zu einem Maß. Diese Fortsetzung heißt **Lebesguemaß** (L-Maß) und wird ebenfalls mit λ_d bezeichnet.

Beweis
Aus Lemma 2.1 und Satz 2.4 folgt: λ_d ist ein Prämaß auf $\mathfrak{R} := \mathcal{F}_d$; es ist $\sigma(\mathfrak{R}) = \mathfrak{B}_d$.

Aus Satz 2.5 folgt: λ_d kann zu einem Maß auf $\mathfrak{B}_d$ fortgesetzt werden.

Sei ν ein weiteres Maß auf $\mathfrak{B}_d$ mit: $\nu(A) = \lambda_d(A) \, \forall A \in \mathcal{F}_d$. $\mathcal{E} := \mathcal{I}_d$. Dann: $\sigma(\mathcal{E}) \overset{1.4}{=} \mathfrak{B}_d$.

(1) $E, F \in \mathcal{E} \overset{2.1}{\Longrightarrow} E \cap F \in \mathcal{E}$

(2) $E_n := (-n, n]^d$

Klar:

$$\bigcup E_n = \mathbb{R}^d$$
$$\lambda_d(E_n) = (2n)^d < \infty$$

Klar: $\nu(E) = \lambda_d(E) \, \forall E \in \mathcal{E}$. Mit Satz 2.6 folgt dann: $\nu = \lambda_d$ auf $\mathfrak{B}_d$. ∎

Bemerkung: Sei $X \in \mathfrak{B}_d$. Aus 1.6 folgt: $\mathfrak{B}(X) = \{A \in \mathfrak{B}_d \mid A \subseteq X\}$. Die Einschränkung von λ_d auf $\mathfrak{B}(X)$ heißt ebenfalls L-Maß und wird mit λ_d bezeichnet.

Beispiele:

(1) Seien $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$, $a \leq b$ und $I = [a, b]$.
Behauptung
$\lambda_d([a, b]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$ (Entsprechendes gilt für (a, b) und $[a, b)$)

Beweis
$I_n := (a_1 - \frac{1}{n}, b_1] \times \cdots \times (a_d - \frac{1}{n}, b_d]$; $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$; $\bigcap I_n = I$, $\lambda_d(I_1) < \infty$

Aus Satz 1.7, Punkt 5, folgt:

$$\begin{aligned}\lambda_d(I) &= \lim_{n\to\infty} \lambda_d(I_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (b_1 - a_1 + \frac{1}{n}) \cdots (b_d - a_d + \frac{1}{n}) \\ &= (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)\end{aligned}$$ ∎

(2) Sei $a \in \mathbb{R}^d$, $\{a\} = [a, a] \in \mathfrak{B}_d$. Aus obigem Beispiel (1) folgt: $\lambda_d(\{a\}) = 0$.

(3) $\mathbb{Q}^d$ ist abzählbar, also: $\mathbb{Q}^d = \{a_1, a_2, \dots\}$ mit $a_j \neq a_i \, (i \neq j)$. Dann: $\mathbb{Q}^d = \bigcup \{a_j\}$

Dann gilt: $\mathbb{Q}^d \in \mathfrak{B}_d$ und $\lambda_d(\mathbb{Q}^d) = \sum \lambda_d(\{a_j\}) = 0$.

(4) Wie in Beispiel (3): Ist $A \subseteq \mathbb{R}^d$ abzählbar, so ist $A \in \mathfrak{B}_d$ und $\lambda_d(A) = 0$.

(5) Sei $j \in \{1, \dots, d\}$ und $H_j := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_j = 0\}$. H_j ist abgeschlossen, damit folgt: $H_j \in \mathfrak{B}_d$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $j = d$. Dann: $I_n := \underbrace{[-n, n] \times \cdots \times [-n, n]}_{(d-1)-\text{mal}} \times \{0\}$.

Aus Beispiel (1) folgt: $\lambda_d(I_n) = 0$.

Aus $H_d = \bigcup I_n$ folgt: $\lambda_d(H_d) \leq \sum \lambda_d(I_n) = 0$. Also: $\lambda_d(H_j) = 0$.

Definition
Sei $x \in \mathbb{R}^d, B \subseteq \mathbb{R}^d$. Definiere:

$$x + B := \{x + b \mid b \in B\}$$

Beispiel
Ist $I \in \mathcal{I}_d$, so gilt $x + I \in \mathcal{I}_d$ und $\lambda_d(x + I) = \lambda_d(I)$.

Satz 2.8
Sei $x \in \mathbb{R}^d, \mathfrak{A} := \{B \in \mathfrak{B}_d : x + B \in \mathfrak{B}_d\}$ und $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ sei definiert durch $\mu(A) := \lambda_d(x + A)$. Dann gilt:

(1) $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}, \mu)$ ist ein Maßraum.

(2) Es ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_d$ und $\mu = \lambda_d$ auf $\mathfrak{B}_d$. D.h. für alle $A \in \mathfrak{B}_d$ ist $x + A \in \mathfrak{B}_d$ und $\lambda_d(x + A) = \lambda_d(A)$ (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes).

Beweis

(1) Leichte Übung!

(2) Es ist klar, dass $\mathfrak{B}_d \supseteq \mathfrak{A}$. Nach dem Beispiel von oben gilt:

$$\mathcal{I}_d \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{I}_d) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$$

Setze $\mathcal{E} := \mathcal{I}_d$, dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}_d$ und es gilt nach dem Beispiel von oben:

$$\forall E \in \mathcal{E} : \mu(E) = \lambda_d(E)$$

$\mathcal{E}$ hat die Eigenschaften (1) und (2) aus Satz 2.6, daraus folgt dann, dass $\mu = \lambda_d$ auf $\mathfrak{B}_d$ ist. ■

Satz 2.9
Sei μ ein Maß auf $\mathfrak{B}_d$ mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathfrak{B}_d : \mu(A) = \mu(x + A)$$

Weiter sei $c := \mu((0, 1]^d) < \infty$. Dann gilt:

$$\mu = c \cdot \lambda_d$$

Satz 2.10 (Regularität des Lebesgue-Maßes)
Sei $A \in \mathfrak{B}_d$, dann gilt:

(1) $\lambda_d(A) = \inf\left\{\lambda_d(G) \mid G \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen und } A \subseteq G\right\}$
$= \inf\left\{\lambda_d(V) \mid V = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, I_j \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offenes Intervall }, A \subseteq V\right\}$

(2) $\lambda_d(A) = \sup\{\lambda_d(K) \mid K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt }, K \subseteq A\}$

Beweis

(1) Ohne Beweis.

(2) Setze $\beta := \sup\{\lambda_d(K) \mid K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt }, K \subseteq A\}$. Sei K kompakt und $K \subseteq A$, dann gilt $\lambda_d(K) \leq \lambda_d(A)$, also ist auch $\beta \leq \lambda_d(A)$.

Fall 1: Sei A zusätzlich beschränkt.
Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $r > 0$, sodass $A \subseteq B := \overline{U_r(0)} \subseteq [-r, r]^d$ ist, dann gilt:

$$\lambda_d(A) \leq \lambda_d([-r, r]^d) = (2r)^d < \infty$$

Aus (1) folgt, dass eine offene Menge $G \supseteq B \setminus A$ existiert mit $\lambda_d(G) \leq \lambda_d(B \setminus A) + \varepsilon$. Dann gilt nach 1.7:

$$\lambda_d(B \setminus A) = \lambda_d(B) - \lambda_d(A)$$

Setze nun $K := B \setminus G = B \cap G^c$, dann ist K kompakt und $K \subseteq B \setminus (B \setminus A) = A$. Da $B \subseteq G \cup K$ ist, gilt:

$$\lambda_d(B) \leq \lambda_d(G \cup K) \leq \lambda_d(B) - \lambda_d(A) + \varepsilon + \lambda_d(K)$$

Woraus folgt:

$$\lambda_d(A) \leq \lambda_d(K) + \varepsilon$$

Fall 2: Sei $A \in \mathfrak{B}_d$ beliebig.
Setze $A_n := A \cap \overline{U_n(0)}$. Dann ist A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt, $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Nach 1.7 gilt:

$$\lambda_d(A) = \lim \lambda_d(A_n)$$

Aus Fall 1 folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein kompaktes $K_n \subseteq A_n$ mit $\lambda_d(A_n) \leq \lambda_d(K_n) + \frac{1}{n}$ existiert. Dann gilt:

$$\lambda_d(A_n) \leq \lambda_d(K_n) + \frac{1}{n} \leq \lambda_d(A) + \frac{1}{n}$$

Also auch:

$$\lambda_d(A) = \lim \lambda(K_n) \leq \beta$$

∎

Auswahlaxiom:
Sei $\emptyset \neq \Omega$ Indexmenge, es sei $\{X_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ ein disjunktes System von nichtleeren Mengen X_ω. Dann existiert ein $C \subseteq \bigcup_{\omega\in\Omega} X_\omega$, sodass C mit jedem X_j genau ein Element gemeinsam hat.

Satz 2.11 (Satz von Vitali)
Es existiert ein $C \subseteq \mathbb{R}^d$ sodass $C \notin \mathfrak{B}_d$.

Beweis
Wir definieren auf $[0, 1]^d$ eine Äquivalenzrelation $\sim$, durch:

$$\forall x, y \in [0, 1]^d : x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^d$$
$$\forall x \in [0, 1]^d : [x] := \{y \in [0, 1]^d \mid x \sim y\}$$

Nach dem Auswahlaxiom existiert ein $C \subseteq [0,1]^d$, sodass C mit jedem $[x]$ genau ein Element gemeinsam hat. Es ist $\mathbb{Q}^d \cap [-1,1]^d = \{q_1, q_2, \dots\}$ mit $q_i \neq q_j$ für $(i \neq j)$. Dann gilt:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + C) \subseteq [-1,2]^d \tag{1}$$

$$[0,1]^d \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + C) \tag{2}$$

Beweis
Sei $x \in [0,1]^d$. Wähle $y \in C$ mit $y \in [x]$, dann ist $x \sim y$, also $x - y \in \mathbb{Q}^d \cap [-1,1]^d$. D.h.:

$$\exists n \in \mathbb{N} : x - y = q_n \implies x = q_n + y \in q_n + C$$ ■

Außerdem ist $\{q_n + C \mid n \in \mathbb{N}\}$ disjunkt.

Beweis
Sei $z \in (q_n + C) \cap (q_m + C)$, dann existieren $a, b \in \mathbb{Q}^d$, sodass gilt:

$$\begin{aligned}(q_n + a = z = q_m + b) &\implies (b - a = q_m - q_n \in \mathbb{Q}^d) \\ &\implies (a \sim b) \implies ([a] = [b]) \\ &\implies (a = b) \implies (q_n = q_m)\end{aligned}$$ ■

Annahme: $C \in \mathfrak{B}_d$, dann gilt nach (1):

$$\begin{aligned}3^d &= \lambda_d([-2,1]^d) \\ &\geq \lambda_d(\bigcup (q_n + C)) \\ &= \sum \lambda_d(q_n + C) \\ &= \sum \lambda_d(C)\end{aligned}$$

Also ist $\lambda_d(C) = 0$. Damit folgt aus (2):

$$\begin{aligned}1 &= \lambda_d([0,1]^d) \\ &\leq \lambda_d(\bigcup (q_n + C)) \\ &= \sum \lambda_d(C) \\ &= 0\end{aligned}$$ ■

§ 3 Messbare Funktionen

In diesem Paragraphen seien $\emptyset \neq X, Y, Z$ Mengen.

Definition
Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X, so heißt $(X, \mathfrak{A})$ ein **messbarer Raum**.

Definition
Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X, $\mathfrak{B}$ eine σ-Algebra auf Y und $f : X \to Y$ eine Funktion. f heißt genau dann **$\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbar**, wenn gilt:

$$\forall B \in \mathfrak{B} : f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$$

Bemerkung: Seien die Bezeichnungen wie in obiger Definition, dann gilt:

(1) f sei $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbar, $\mathfrak{A}'$ eine weitere σ-Algebra auf X mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ sei eine σ-Algebra auf Y mit $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$.
Dann ist f $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{B}'$-messbar.

(2) Sei $X_0 \in \mathfrak{A}$, dann gilt $\mathfrak{A}_{X_0} \subseteq \mathfrak{A}$ nach 1.5. Nun sei $f : X \to Y$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbar, dann ist $f_{|X_0} : X_0 \to Y$ $\mathfrak{A}_{X_0}$-$\mathfrak{B}$-messbar.

Beispiel

(1) Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X und $A \subseteq X$. $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-messbar, wenn $A \in \mathfrak{A}$ ist.

(2) Sei $X = \mathbb{R}^d$. Ist $A \in \mathfrak{B}_d$, so ist $\mathbb{1}_A$ $\mathfrak{B}_d$-$\mathfrak{B}_1$-messbar.

(3) Ist C wie in 2.11, so ist $\mathbb{1}_C$ nicht $\mathfrak{B}_d$-$\mathfrak{B}_1$-messbar.

(4) Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$) eine σ-Algebra auf Y (X), dann ist f $\mathcal{P}(X)$-$\mathfrak{B}$-messbar ($\mathfrak{A}$-$\{Y, \emptyset\}$-messbar).

Satz 3.1
Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ σ-Algebren auf X, Y bzw. Z. Weiter seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen.

(1) Ist f $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}-$messbar und ist g $\mathfrak{B}-\mathfrak{C}-$messbar, so ist $g \circ f : X \to Z$ $\mathfrak{A}-\mathfrak{C}-$messbar.

(2) Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ und $\sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}$. Dann:

$$f \text{ ist } \mathfrak{A}-\mathfrak{B}-\text{messbar, genau dann, wenn gilt: } \forall E \in \mathcal{E} : f^{-1}(E) \in \mathfrak{A}$$

Beweis

(1) Sei $C \in \mathfrak{C}$; g ist messbar, daraus folgt $g^{-1}(C) \in \mathfrak{B}$; f ist messbar, daraus folgt $f^{-1}(g^{-1}(C)) = (g \circ f)^{-1}(C) \in \mathfrak{A}$

(2) $\Rightarrow$ ✓

$\Leftarrow$ $\mathfrak{D} := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}\}$ Übung: $\mathfrak{D}$ ist eine σ-Algebra auf Y.

Aus der Voraussetzung folgt: $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{D}$. Dann: $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}$. Ist $B \in \mathfrak{B}$, so ist $B \in \mathfrak{D}$, also $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$. ■

Definition
Sei $X \in \mathfrak{B}_d$. Ist $f : X \to \mathbb{R}^k$ $\mathfrak{B}(X) - \mathfrak{B}_k-$messbar, so heißt f **(Borel-)messbar**.

Ab jetzt sei stets $X \in \mathfrak{B}_d$. (Erinnerung: $\mathfrak{B}(X) = \{A \in \mathfrak{B}_d \mid A \subseteq X\}$)

Satz 3.2
Seien $f, g : X \to \mathbb{R}^k$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) Ist f auf X stetig, so ist f messbar.

(2) Ist $f = (f_1, \dots, f_k)$, so gilt: f ist messbar $\Leftrightarrow$ alle f_j sind messbar.

(3) Sind f und g messbar, so ist $\alpha f + \beta g$ messbar.

(4) Sei $k = 1$ und f und g seien messbar. Dann:

  (i) fg ist messbar

  (ii) Ist $f(x) \neq 0 \forall x \in X$, so ist $\frac{1}{f}$ messbar

  (iii) $\{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\} \in \mathfrak{B}(X)$

Beweis

(1) Sei $G \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^k)$. Mit f stetig folgt: $f^{-1}(G) \in \mathcal{O}(X) \in \mathfrak{B}(X)$

$\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^k)) = \mathfrak{B}_k$. Die Behauptung folgt aus 3.1.(2).

(2) $\Leftarrow$: Sei $I = (a, b] = \prod_{j=1}^k (a_j, b_j] \in I_k \quad (a = (a_1, \dots, a_k),\, b = (b_1, \dots, b_k),\, a \leq b)$

Dann: $f^{-1}(I) = \bigcap_{j=1}^k \underbrace{f_j^{-1}(\underbrace{(a_j, b_j]}_{\in \mathfrak{B}_1})}_{\in \mathfrak{B}(X)} \in \mathfrak{B}(X)$

Aus $\sigma(I_k) = \mathfrak{B}_k$ folgt mit 3.1.(2): f ist messbar.

$\Rightarrow$: Für $j = 1, ..., k$ sei $p_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definiert durch $p_j(x_1, \dots, x_k) := x_j$

p_j ist stetig, also messbar (nach (1)). Es ist $f_j = p_j \circ f$. Mit 3.1.(1) folgt: f_j ist messbar.

(3) $h := (f, g) : X \to \mathbb{R}^{2k}$; aus (2): h ist messbar.

$\varphi(x, y) := \alpha x + \beta y\, (x, y \in \mathbb{R}^k)$

φ ist stetig, also messbar (nach (1)). Es ist $\alpha f + \beta g = \varphi \circ h$. Mit 3.1.(1) folgt: $\alpha f + \beta g$ ist messbar.

(4) (i) $h := (f, g) : X \to \mathbb{R}^{2k}$ ist messbar (nach (2)); $\varphi(x, y) := xy$, φ ist stetig, also messbar.

Es ist $fg = \varphi \circ h$. Mit 3.1.(1) folgt: fg ist messbar.

(ii) $\varphi(x) := \frac{1}{x}$, φ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, also messbar.

$\frac{1}{f} = \varphi \circ f$. Mit 3.1.(1) folgt: $\frac{1}{f}$ ist messbar.

(iii) $A := \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\} = \{x \in X \mid f(x) - g(x) \in [0, \infty)\} = \underbrace{(f-g)}_{\text{messbar nach (3)}}^{-1} \overbrace{([0,\infty))}^{\in \mathfrak{B}_1} \in \mathfrak{B}(X)$ ■

Folgerungen 3.3

(1) Seien A, $B \in \mathfrak{B}(X)$, $A \cap B = \emptyset$ und $X = A \cup B$. Weiter seien $f : A \to \mathbb{R}^k$ und $g : B \to \mathbb{R}^k$ messbar. Dann ist $h : X \to \mathbb{R}^k$, definiert durch

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases},$$

messbar.

(2) Ist $f : X \to \mathbb{R}^k$ messbar und $g(x) := \|f(x)\|$ $(x \in X)$, so ist g messbar.

Beweis

(1) Sei $C \in \mathfrak{B}_k$. Dann:

$$h^{-1}(C) = \underbrace{f^{-1}(C)}_{\in \mathfrak{B}(A) \subseteq \mathfrak{B}(X)} \cup \underbrace{g^{-1}(C)}_{\in \mathfrak{B}(B) \subseteq \mathfrak{B}(X)} \in \mathfrak{B}(X)$$

(2) Definiere $\varphi(z) = \|z\| \quad (z \in \mathbb{R}^k)$; φ ist stetig, also messbar.

Es ist $g = \varphi \circ f$. Mit 3.1 folgt: g ist messbar. ■

Beispiel

$X = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(y)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

für $x \neq 0 :$ $f(x, x) = \frac{\sin(X)}{x} \overset{x \to 0}{\to} 1 \neq 0 = f(0, 0)$, daraus folgt: f ist nicht stetig.

$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$, $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. A ist abgeschlossen, das heißt: $A \in \mathfrak{B}_2$, $B = A^C \in \mathfrak{B}_2$

$$f_1(x, y) := 0 \quad ((x, y) \in A)$$
$$f_2(x, y) := \frac{\sin(y)}{x} \quad ((x, y) \in B)$$

f_1 ist stetig auf A, f_2 ist stetig auf B. Also: f_1, f_2 ist messbar; mit 3.3.(1) folgt: f ist messbar.

Ein neues Symbol kommt hinzu: $-\infty$

$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

In $\overline{\mathbb{R}}$ gelten folgende Regeln, wobei $a \in \mathbb{R}$:

(1) $-\infty < a < +\infty$

(2) $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$

(3) $\pm\infty + a := a + (\pm\infty) := \pm\infty$

(4) $a \cdot (\pm\infty) := (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ \mp\infty & a < 0 \end{cases}$

(5) $\frac{a}{\pm\infty} := 0$

Definition

(1) Sei (x_n) eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. $x_n \to +\infty :\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R} \exists n_c \in \mathbb{N} : x_n \geq c \forall n \geq n_c$
Analog für $-\infty$.

(2) Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann:

$$\begin{aligned}
\{f \leq g\} &:= \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\} \\
\{f \geq g\} &:= \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\} \\
\{f \neq g\} &:= \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \\
\{f < g\} &:= \{x \in X \mid f(x) < g(x)\} \\
\{f > g\} &:= \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}
\end{aligned}$$

(3) Sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann:

$$\begin{aligned}
\{f \leq a\} &:= \{x \in X \mid f(x) \leq a\} \\
\{f \geq a\} &:= \{x \in X \mid f(x) \geq a\} \\
\{f \neq a\} &:= \{x \in X \mid f(x) \neq a\} \\
\{f < a\} &:= \{x \in X \mid f(x) < a\} \\
\{f > a\} &:= \{x \in X \mid f(x) > a\}
\end{aligned}$$

Definition
$\overline{\mathfrak{B}}_1 := \{B \cup E \mid B \in \mathfrak{B}_1,\ E \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$. Dann: $\mathfrak{B}_1 \subseteq \overline{\mathfrak{B}}_1$
Übung: $\overline{\mathfrak{B}}_1$ ist eine σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$.
$\overline{\mathfrak{B}}_1$ heißt **Borelsche σ-Algebra** auf $\overline{\mathbb{R}}$. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. f heißt **(Borel-)messbar** (mb) $:\Leftrightarrow f$ ist $\mathfrak{B}(X) - \overline{\mathfrak{B}}_1-$ messbar.

Beispiel
$f(x) := +\infty \quad (x \in X)$, also: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

Sei $B \in \overline{\mathfrak{B}}_1$, $A := f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

Fall 1: $+\infty \notin B$, dann: $A = \emptyset \in \mathfrak{B}(X)$

Fall 2: $+\infty \in B$, dann: $A = X \in \mathfrak{B}(X)$

f ist messbar.

Satz 3.4

(1) Definiere die Mengen:

$$\mathcal{E}_1 := \{[-\infty, a] \mid a \in \mathbb{Q}\} \qquad \mathcal{E}_2 := \{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathcal{E}_3 := \{(a, \infty] \mid a \in \mathbb{Q}\} \qquad \mathcal{E}_4 := \{[a, \infty] \mid a \in \mathbb{Q}\}$$

Dann gilt:

$$\overline{\mathfrak{B}_1} = \sigma(\mathcal{E}_j) \quad \text{für } j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

(2) Für $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f ist messbar.

(ii) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f \leq a\} \in \mathfrak{B}(X)$.

(iii) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f \geq a\} \in \mathfrak{B}(X)$.

(iv) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f < a\} \in \mathfrak{B}(X)$.

(v) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f > a\} \in \mathfrak{B}(X)$.

(3) Die Äquivalenzen in (2) gelten auch für Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$.

Beweis

Die folgenden Beweise erfolgen exemplarisch für einen der Unterpunkte und funktionieren fast analog für die anderen.

(1) Für $a \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$[-\infty, a]^c = (a, \infty] \in \sigma(\mathcal{E}_1)$$

D.h. es gilt $\mathcal{E}_3 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ und damit auch $\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$.

(2) Es gilt:

$$\{f \leq a\} = \{x \in X \mid f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a])$$

Die Äquivalenz folgt dann aus (1) und 3.1.

(3) Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ kann aufgefasst werden als Funktion $\overline{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Es ist f genau dann $\mathfrak{B}(X)$-$\mathfrak{B}_1$-messbar wenn $\overline{f}$ $\mathfrak{B}(X)$-$\overline{\mathfrak{B}_1}$-messbar ist. ∎

Definition

Sei $M \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

(1) Ist $M = \emptyset$ oder $M = \{-\infty\}$, so sei

$$\sup M := -\infty$$

(2) Ist $M \setminus \{-\infty\} \neq \emptyset$ und nach oben beschränkt (also insbesondere $\infty \notin M$), so sei

$$\sup M := \sup(M \setminus \{-\infty\})$$

(3) Ist $M \setminus \{-\infty\}$ nicht nach oben beschränkt oder $\infty \in M$, so sei

$$\sup M := \infty$$

(4) Es sei $\inf M := -\sup(-M)$, wobei $-M := \{-m \mid m \in M\}$.

Definition
Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

(1) Die Funktion $\sup_{n\in\mathbb{N}}(f_n) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\left(\inf_{n\in\mathbb{N}}(f_n) : X \to \overline{\mathbb{R}}\right)$ ist definiert durch:

$$(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) := \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad x \in X$$

$$\left((\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) := \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad x \in X\right)$$

(2) Die Funktion $\limsup_{n\to\infty} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\left(\liminf_{n\to\infty} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}\right)$ ist definiert durch:

$$\limsup_{n\to\infty} f_n := \inf_{j\in\mathbb{N}}(\sup_{n\geq j} f_n) \tag{$*$}$$

$$\liminf_{n\to\infty} f_n := \sup_{j\in\mathbb{N}}(\inf_{n\geq j} f_n)$$

Erinnerung: Für eine beschränkte Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ war

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf\{\sup\{a_n \mid n \geq j\} \mid j \in \mathbb{N}\}$$

(3) Sei $N \in \mathbb{N}$ und $g_j := f_j$ (für $j = 1, \ldots, N$), $g_j := f_N$ (für $j > N$). Definiere:

$$\max_{1\leq n\leq N} f_n := \sup_{j\in\mathbb{N}} g_n$$

$$\min_{1\leq n\leq N} f_n := \inf_{j\in\mathbb{N}} g_n$$

(4) Ist $f_n(x)$ für jedes $x \in \overline{\mathbb{R}}$ konvergent, so ist $\lim_{n\to\infty} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert durch:

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

(In diesem Fall gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$.)

Satz 3.5
Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und jedes f_n messbar.

(1) Dann sind ebenfalls messbar:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$$

(2) Ist $(f_n(x))$ für jedes $x \in X$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent, so ist $\lim_{n\to\infty} f_n$ messbar.

Beweis

(1) Sei $a \in \mathbb{Q}$, dann gilt (nach 3.4(2)):

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \leq a\} \in \mathfrak{B}(X)$$

Also ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar. Analog lässt sich die Messbarkeit von $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ zeigen, der Rest folgt dann aus $(*)$.

(2) Folgt aus (1) und obiger Bemerkung in der Definition. ∎

Beispiel

Sei $X = I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei auf I differenzierbar.
Für $x \in I, n \in \mathbb{N}$ sei $f_n := n(f(x - \frac{1}{n}) - f(x))$. Da f stetig ist, ist auch jedes f_n stetig, also insbesondere messbar und es gilt:

$$f_n(x) = \frac{f(x-\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\to} f'(x)$$

Aus 3.5(2) folgt, dass f' messbar ist.

Definition

Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion.

(1) $f_+ := \max\{f, 0\}$ heißt **Positivteil** von f.

(2) $f_- := \max\{-f, 0\}$ heißt **Negativteil** von f.

Es gilt $f_+, f_- \geq 0$, $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

Satz 3.6

Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) Sind f, g messbar und ist $\alpha f(x) + \beta g(x)$ für jedes $x \in X$ definiert, so ist $\alpha f + \beta g$ messbar.

(2) Sind f, g messbar und ist $f(x)g(x)$ für jedes $x \in X$ definiert, so ist fg messbar.

(3) f ist genau dann messbar, wenn f_+ und f_- messbar sind. In diesem Fall ist auch $|f|$ messbar.

Beweis

(1)+(2) Für alle $n \in \mathbb{N}, x \in X$ seien f_n und g_n wie folgt definiert:

$$f_n(x) := \max\{-n, \min\{f(x), n\}\}$$
$$g_n(x) := \max\{-n, \min\{g(x), n\}\}$$

Dann sind $f_n(x), g_n(x) \in [-n, n]$ für alle $n \in \mathbb{N}, x \in X$. Nach 3.2(3) sind also $\alpha f_n + \beta g_n$ und $f_n g_n$ messbar. Außerdem gilt:

$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} \alpha f(x) + \beta g(x)$$
$$f_n(x) g_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x)g(x)$$

Die Behauptung folgt aus 3.5(2).

(3) Nach 3.5(1) sind f_+ und f_- messbar, wenn f messbar ist. Die umgekehrte Implikation folgt aus 3.6(1). Sind f_+ und f_- messbar, so folgt ebenfalls aus 3.6(1), dass $|f| = f_+ + f_-$ messbar ist. ■

Beispiel
Sei $C \subseteq \mathbb{R}^d$ wie in 2.11, also $C \notin \mathfrak{B}_d$. Definiere $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in C \\ -1 & , x \notin C \end{cases}$$

Dann ist $\{f \geq 1\} = C$, also f **nicht** messbar. Aber für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist $|f(x)| = 1$, also $|f| = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$ und damit messbar.

Definition
$f : X \to \mathbb{R}$ sei messbar.

(1) f heißt **einfach** oder **Treppenfunktion**, genau dann wenn $f(X)$ endlich ist.

(2) f sei einfach und $f(X) = \{y_1, \dots, y_m\}$ mit $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$. Sei weiter $A_j := f^{-1}(\{y_j\})$ für $j = 1, \dots, m$. Dann sind $A_1, \dots, A_m \in \mathfrak{B}(X)$ und $X = \bigcup_{j=1}^m A_j$ disjunkte Vereinigung.

$$f = \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{1}_{A_j}$$

heißt **Normalform** von f.

Beispiel
Sei $A \in \mathfrak{B}(X)$. Definiere:

$$f := \mathbb{1}_A = 2 \cdot \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_X + \mathbb{1}_{X \setminus A} = \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}$$

Wobei das letzte die Normalform von f ist. Man sieht also, dass einfache Funktionen mehrere Darstellungen haben können.

Satz 3.7
Linearkombinationen und Produkte, sowie endliche Maxima und Minima einfacher Funktionen, sind einfach.

Satz 3.8
Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

(1) Ist $f \geq 0$ auf X, so existiert eine Folge (f_n) von einfachen Funktionen $f_n : X \to [0, \infty)$, sodass $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ auf X $(\forall n \in \mathbb{N})$ und $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x)$ $(\forall x \in X)$. In diesem Fall heißt (f_n) **zulässig** für f.

(2) Es existiert eine Folge (f_n) von einfachen Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, sodass $|f_n| \leq |f|$ auf X $(\forall n \in \mathbb{N})$ und $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x)$ $(\forall x \in X)$.

(3) Ist f beschränkt auf X (also insbesondere $\pm\infty \notin f(X)$), so kommt in (2) noch hinzu, dass (f_n) auf X gleichmäßig gegen f konvergiert.

Folgerungen 3.9 ((Beweis mit 3.8(2) und 3.5))
Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion, dann ist f genau dann messbar, wenn eine Folge einfacher Funktionen (f_n) mit $f_n : X \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x)$ für alle $x \in X$ existiert.

Beweis

(1) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $\varphi_n : [0, \infty] \to [0, \infty)$ durch

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \frac{[2^n t]}{2^n} & , 0 \leq t < n \\ n & , n \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Dann ist φ_n $(\mathfrak{B}_1)_{[0,\infty]}$-$\mathfrak{B}_1$-messbar, außerdem gilt:

$$\forall t \in [0, \infty] \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \varphi_1 \leq \cdots \leq t$$
$$\forall t \in [0, n] \forall n \in \mathbb{N} : t - \frac{1}{2^n} \leq \varphi_n(t) \leq t$$

und es ist $\varphi_n(t) \overset{n\to\infty}{\to} t$ für alle $t \in [0\infty]$. Setze $f_n := \varphi_n \circ f$. Dann leistet (f_n) das gewünschte.

(2) Es ist $f = f_+ - f_-$ und $f_+, f_- \geq 0$ auf X. Seien $(g_n), (h_n)$ zulässige Folgen für f_+ bzw. f_-. Definiere $f_n := g_n - h_n$. Dann ist klar, dass gilt:

$$\forall x \in X : f_n(x) = g_n(x) - h_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f_+(x) - f_-(x) = f(x)$$

Weiter gilt:

$$|f_n| \leq g_n + h_n \leq f_+ + f_- = |f|$$

(3) Ohne Beweis. ∎

§ 4 Konstruktion des Lebesgueintegrals

In diesem Paragraphen sei $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$. Wir schreiben außerdem λ statt λ_d.

Definition
Sei $f : X \to [0, \infty)$ eine einfache Funktion mit der Normalform $f = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$.
Das **Lebesgueintegral** von f ist definiert durch:

$$\int_X f(x) \, \mathrm{d}x := \sum_{j=1}^{m} y_j \lambda(A_j)$$

Satz 4.1
Sei $f : X \to [0, \infty)$ einfach, $z_1, \ldots, z_k \in [0, \infty)$ und $B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{B}(X)$ mit $\bigcup B_j = X$ und $f = \sum_{j=1}^{k} z_j \mathbb{1}_{B_j}$. Dann gilt:

$$\int_X f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{k} z_j \lambda(B_j)$$

Beweis
In der großen Übung. ∎

Satz 4.2
Seien $f, g : X \to [0, \infty)$ einfach, $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ und $A \in \mathfrak{B}(X)$.

(1) $\int_X \mathbb{1}_A(x) \, \mathrm{d}x = \lambda(A)$

(2) $\int_X (\alpha f + \beta g)(x) \, \mathrm{d}x = \alpha \int_X f(x) \, \mathrm{d}x + \beta \int_X g(x) \, \mathrm{d}x$

(3) Ist $f \leq g$ auf X, so ist $\int_X f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_X g(x) \, \mathrm{d}x$.

Beweis

(1) Folgt aus der Definition und 4.1.

(2) Es seien $f = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$ und $g = \sum_{j=1}^{k} z_j \mathbb{1}_{B_j}$ die Normalformen von f und g. Dann gilt:

$$\alpha f + \beta g = \sum_{j=1}^{m} \alpha y_j \mathbb{1}_{A_j} + \sum_{j=1}^{k} \beta z_j \mathbb{1}_{B_j}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_X (\alpha f + \beta g) &\overset{4.1}{=} \sum_{j=1}^{m} \alpha y_j \lambda(A_j) + \sum_{j=1}^{k} \beta z_j \lambda(B_j) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{m} y_j \lambda(A_j) + \beta \sum_{j=1}^{k} z_j \lambda(B_j) \\ &= \alpha \int_X f(x)\ \mathrm{d}x + \beta \int_X g(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

(3) Definiere $h := g - f$. Dann ist $h \geq 0$ und einfach. Sei $h = \sum_{j=1}^{m} x_j \mathbb{1}_{C_j}$ die Normalform von h, d.h. $x_1, \ldots, x_m \geq 0$. Dann gilt:

$$\int_X h(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} x_j \lambda(C_j) \geq 0$$

Also folgt aus $g = f + h$ und (2):

$$\int_X g(x)\ \mathrm{d}x = \int_X f(x)\ \mathrm{d}x + \int_X h(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_X f(x)\ \mathrm{d}x$$

∎

Definition
Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. (f_n) sei eine für f zulässige Folge. Das **Lebesgueintegral** von f ist definiert als:

$$\int_X f(x)\ \mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ \mathrm{d}x \tag{$*$}$$

Bemerkung:

(1) In 4.3 werden wir sehen, dass $(*)$ unabhängig ist von der Wahl der für f zulässigen Folge (f_n).

(2) $(f_n(x))$ ist wachsend für alle $x \in X$, d.h.:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = (\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x)$$

(3) Aus 4.2(3) folgt dass $(\int_X f_n(x)\ \mathrm{d}x)$ wachsend ist, d.h.:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ \mathrm{d}x = \sup\{\int_X f_n(x)\ \mathrm{d}x \mid n \in \mathbb{N}\} = \int_X f_(x)\ \mathrm{d}x$$

Bezeichnung:
Für messbare Funktionen $f : X \to [0, \infty]$ definiere

$$M(f) := \{\int_X g\ \mathrm{d}x \mid g : X \to [0, \infty) \text{ einfach und } g \leq f \text{ auf } X\}$$

Satz 4.3
Ist $f : X \to [0,\infty]$ messbar und (f_n) zulässig für f, so gilt:

$$L := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}x = \sup M(f)$$

Insbesondere ist $\int_X f(x) \, \mathrm{d}x$ wohldefiniert.

Folgerungen 4.4
Ist $f : X \to [0,\infty]$ messbar, so ist $\int_X f(x) \, \mathrm{d}x = \sup M(f)$.

Beweis
Sei $\int_X f_n \, dx \in M(f) \, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$L = \sup \left\{ \int_X f_n \, dx \mid n \in \mathbb{N} \right\} \leq \sup M(f)$$

Sei nun g einfach und $0 \leq g \leq f$. Sei weiter

$$g = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$$

die Normalform von g.
Sei $\alpha > 1$ und $B_n := \{\alpha f_n \geq g\}$. Dann ist

$$B_n \in \mathfrak{B}(X) \text{ und } (B_n \subseteq B_{n+1}, \text{ sowie } \mathbb{1}_{B_n} g \leq \alpha f_n.$$

Sei $x \in X$.
Fall 1: Ist $f(x) = 0$, so ist wegen $0 \leq g \leq f$ auch $g(x) = 0$. Somit ist $x \in B_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Fall 2: Ist $f(x) > 0$, so ist

$$\frac{1}{\alpha} g(x) < f(x)$$

(Dies ist klar für $g(x) = 0$ und falls gilt: $g(x) > 0$, so ist $\frac{1}{\alpha} g(x) < g(x) \leq f(x)$)
Da f_n zulässig für f ist, gilt: $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$, weshalb ein $n(x) \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$\frac{1}{\alpha} g(x) < f(x) \text{für jedes } n \geq n(x)$$

Es folgt $x \in B_n$ für jedes $n \geq n(x)$.
Fazit: $X = \bigcup B_n$.

$$A_j = A_j \cap X = A_j \cap \left(\bigcup B_n \right) = \bigcup (A_j \cap B_n) \text{ und } A_j \cap B_n \subseteq A_j \cap B_{n+1}$$

Aus 1.7 folgt $\lambda(A_j) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(A_j \cap B_n)$. Das liefert:

$$\begin{aligned}
\int\limits_X g \, dx &= \sum_{j=1}^{m} y_j \lambda(A_j) = \sum_{j=1}^{m} y_j \lim_{n\to\infty} \lambda(A_j \cap B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} y_j \lambda(A_j \cap B_n) \overset{4.1}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \mathbb{1}_{B_n} g \, dx \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \alpha f_n \, dx = \alpha L
\end{aligned}$$

g war einfach und $0 \leq g \leq f$ beliebig, sodass

$$\sup M(f) \leq \alpha L \overset{\alpha \to 1}{\Longrightarrow} \sup M(f) \leq L \qquad \blacksquare$$

Satz 4.5
Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar und $\alpha, \beta \geq 0$.

(1) $\int_X (\alpha f + \beta g)(x) \,\mathrm{d}x = \alpha \int_X f(x) \,\mathrm{d}x + \beta \int_X g(x) \,\mathrm{d}x$

(2) Ist $f \leq g$ auf X, so gilt $\int_X f(x) \,\mathrm{d}x \leq \int_X g(x) \,\mathrm{d}x$

(3) $\int_X f(x) \,\mathrm{d}x = 0 \iff \lambda(\{f > 0\}) = 0$

Beweis

(1) (f_n) und (g_n) seien zulässig für f bzw. g. Weiter sei $(h_n) := \alpha(f_n) + \beta(g_n)$. Dann ist wegen 3.7 und $\alpha, \beta \geq 0$, dass (h_n) zulässig für $\alpha f + \beta g$ ist. Dann:

$$\begin{aligned}\int_X (\alpha f + \beta g)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_X (\alpha(f_n) + \beta(g_n))\,dx \\ &\overset{4.2}{=} \alpha \lim_{n\to\infty} \int_X (f_n)\,dx + \beta \lim_{n\to\infty} \int_X (g_n)\,dx \\ &= \alpha \int_X f\,dx + \beta \int_X g\,dx\end{aligned}$$

(2) Wegen $f \leq g$ auf X ist $M(f) \subseteq M(g)$ und somit auch $\sup M(f) \leq \sup M(g)$. Aus 4.4 folgt nun die Behauptung.

(3) Setze $A := \{f > 0\} = \{x \in X : f(x) > 0\}$.

„ $\Longrightarrow$ “ Sei $\int_X f\,dx = 0$ und $A_n := \{f > \frac{1}{n}\}$. Dann ist $A = \bigcup A_n$ und $f \geq \frac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n}$. Damit folgt:

$$0 = \int_X f\,dx \overset{(2)}{\geq} \int_X \frac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n}\,dx = \frac{1}{n}\lambda(A_n)$$

Es ist also $\lambda(A_n) = 0$ und damit gilt weiter

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup A_n\right) \overset{1.7}{\leq} \sum \lambda(A_n) = 0$$

Also ist auch $\lambda(A) = 0$.

„ $\Longleftarrow$ “ Sei $\lambda(A) = 0$, (f_n) zulässig für f und $c_n := \max\{f_n(x) : x \in X\}$. Dann ist $f_n \leq c_n \mathbb{1}_A$ und es gilt:

$$0 \leq \int_X f_n\,dx \overset{(2)}{\leq} \int_X c_n \mathbb{1}_A\,dx = c_n \lambda(A) \overset{\text{Vor.}}{=} 0$$

Es ist also $\int_X f_n\,dx = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit auch $\int_X f\,dx = 0$ $\blacksquare$

Satz 4.6 (Satz von Beppo Levi (Version I))
Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, \infty]$ und es gelte $f_n \leq f_{n+1}$ auf X für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(1) Für alle $x \in X$ existiert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(2) Die Funktion $f : X \to [0, \infty]$ definiert durch:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

ist messbar.

(3) $\int_X \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_X f(x) \, \mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \, \mathrm{d}x$

Beweis

(1) Für alle $x \in X$ ist $(f_n(x))$ wachsend, also konvergent in $[0, +\infty]$.

(2) folgt aus 3.5.

(3) Sei $\left(u_j^{(n)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ zulässig für f_n und $v_j := \max\left\{u_j^{(1)}, u_j^{(2)}, \ldots, u_j^{(j)}\right\}$. Aus 3.7 folgt, dass v_j einfach ist und aus der Konstruktion lässt sich nachrechnen, dass gilt:

$$0 \leq v_j \leq v_{j+1} \text{ und } v_j \leq f_n \leq f \text{ und } f_n = \sup_{j\in\mathbb{N}} u_j^{(n)} \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} v_j \text{ (auf } X\text{)}$$

Damit ist (v_j) zulässig für f und es gilt:

$$\int_X f \, dx = \lim_{j\to\infty} \int_X v_j \, dx \leq \lim_{j\to\infty} \int_X f_j \, dx \leq \int_X f \, dx$$

■

Satz 4.7 (Satz von Beppo Levi (Version II))
Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, \infty]$.

(1) Für alle $x \in X$ existiert $s(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$.

(2) $s : X \to [0, \infty]$ ist messbar.

(3) $\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j(x) \, \mathrm{d}x$

Beweis
Setze

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} f_j$$

Dann erfüllt (s_n) die Voraussetzungen von 4.6. Aus 4.6 und 4.5(1) folgt die Behauptung. ■

Satz 4.8
Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar und es sei $\emptyset \neq Y \in \mathfrak{B}(X)$ (also $Y \subseteq X$ und $Y \in \mathfrak{B}_d$). Dann sind die Funktionen $f_{|Y} : Y \to [0, \infty]$ und $\mathbb{1}_Y \cdot f : X \to [0, \infty]$ messbar und es gilt:

$$\int_Y f(x)\, dx := \int_Y f_{|Y}(x)\, dx = \int_X (\mathbb{1}_Y \cdot f)(x)\, dx$$

Beweis
Fall 1: Die Behauptung ist klar, falls f einfach ist. (Übung!)
Fall 2: Sei (f_n) zulässig für f und $g_n := f_{n|Y}, h_n := \mathbb{1}_Y f_n$ Dann ist (g_n) zulässig für $f_{|Y}$ und (h_n) ist zulässig für $\mathbb{1}_Y f_n$. Insbesondere sind $f_{n|Y}$ und $\mathbb{1}_Y f_n$ nach 3.5 messbar. Weiter gilt:

$$\int_Y f_{|Y}\, dx \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \int_Y g_n\, dx \overset{Fall 1}{=} \int_X h_n\, dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \mathbb{1}_Y f\, dx$$ ■

Definition
Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. f heißt (Lebesgue-)**integrierbar** (über X), genau dann wenn $\int_X f_+(x)\, dx < \infty$ **und** $\int_X f_-(x)\, dx < \infty$.
In diesem Fall heißt:

$$\int_X f(x)\, dx := \int_X f_+(x)\, dx - \int_X f_-(x)\, dx$$

das (Lebesgue-)**Integral** von f (über X).

Beachte:
Ist $f : X \to [0, \infty]$ messbar, so ist f genau dann integrierbar, wenn gilt:

$$\int_X f(x)\, dx < \infty$$

Beispiel
Sei $X \in \mathfrak{B}_1$, $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in X \cap \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in X \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = \mathbb{1}_{X\cap\mathbb{Q}}$. $X, \mathbb{Q} \in \mathfrak{B}_1 \implies X \cap \mathbb{Q} \in \mathfrak{B}_1 \implies f$ ist messbar.

$$0 \leq \int_X f(x)\, dx = \int_X \mathbb{1}_{X\cap\mathbb{Q}}\, dx = \lambda(X \cap \mathbb{Q}) \leq \lambda(\mathbb{Q}) = 0$$

Das heißt: $f \in \mathfrak{L}^1(X)$, $\int_X f\, dx = 0$. Ist speziell $X = [a, b] \quad (a < b)$, so gilt: $f \in \mathfrak{L}^1([a, b])$, aber $f \notin R([a, b])$.

Satz 4.9 (Charakterisierung der Integrierbarkeit)
Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) f ist integrierbar.

(2) Es existieren integrierbare Funktionen $u, v : X \to [0, +\infty]$ mit $u(x) = v(x) = \infty$ für **kein** $x \in X$ und $f = u - v$ auf X.

(3) Es existiert eine integrierbare Funktion $g : X \to [0, +\infty]$ mit $|f| \leq g$ auf X.

(4) $|f|$ ist integrierbar.

Zusatz:

(1) $\mathfrak{L}^1(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } \int_X |f| \,\mathrm{d}x < \infty\}$ (folgt aus (1)-(4)).

(2) Sind u, v wie in (2), so gilt: $\int_X f \,\mathrm{d}x = \int_X u \,\mathrm{d}x - \int_X v \,\mathrm{d}x$.

Beweis (des Satzes)

(1) $\Rightarrow$ (2) $u := f_+$, $v := f_-$.

(2) $\Rightarrow$ (3) $g := u + v$, dann ist $u, v \geq 0$, $g \geq 0$, $\int_X g \,\mathrm{d}x \overset{4.5}{=} \int_X u \,\mathrm{d}x + \int_X v \,\mathrm{d}x < \infty$. $\implies$ g ist integrierbar und: $|f| = |u - v| \leq |u| + |v| = u + v = g$ auf X.

(3) $\Rightarrow$ (4) 4.5 $\implies \int_X |f| \,\mathrm{d}x \leq \int_X g \,\mathrm{d}x < \infty \implies f$ ist integrierbar.

(4) $\Rightarrow$ (1) $f_+, f_- \leq |f|$ auf X. $\implies 0 \leq \int_X f_\pm \,\mathrm{d}x \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}x < \infty \overset{Def.}{\implies} f$ ist integrierbar. ■

Beweis (des Zusatzes)

(1) ✓

(2) Es ist $f = u - v = f_+ - f_- \implies u + f_- = f_+ + v$.

$$\implies \int_X u \,\mathrm{d}x + \int_X f_- \,\mathrm{d}x \overset{4.5}{=} \int_X (u + f_-) \,\mathrm{d}x = \int_X (f_+ + v) \,\mathrm{d}x \overset{4.5}{=} \int_X f_+ \,\mathrm{d}x + \int_X v \,\mathrm{d}x$$

$$\implies \int_X u \,\mathrm{d}x - \int_X v \,\mathrm{d}x = \int_X f_+ \,\mathrm{d}x - \int_X f_- \,\mathrm{d}x \overset{Def.}{=} \int_X f \,\mathrm{d}x.$$

■

Folgerungen 4.10
Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $N := \{|f| = +\infty\} = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$. Dann ist $N \in \mathfrak{B}(X)$ und $\lambda(N) = 0$.

Beweis
3.4 $\implies N \in \mathfrak{B}(X)$. $n\mathbb{1}_N \leq |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$n \cdot \lambda(N) = \int_X n\mathbb{1}_N \,\mathrm{d}x \overset{4.5}{\leq} \int_X |f| \,\mathrm{d}x \overset{4.9}{<} \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Also: $0 \leq n\lambda(N) \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}x \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \lambda(N) = 0$ ■

Satz 4.11
$f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seien integrierbar und es sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) αf ist integrierbar und $\int_X (\alpha f) \,\mathrm{d}x = \alpha \int_X f \,\mathrm{d}x$.

(2) Ist $f + g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ auf X definiert, so ist $f + g$ integrierbar und es gilt:

$$\int_X (f + g) \,\mathrm{d}x = \int_X f \,\mathrm{d}x + \int_X g \,\mathrm{d}x$$

(Für $f = +\infty$ und $g = -\infty$ ist $f + g$ beispielsweise nicht definiert.)

(3) $\mathfrak{L}^1(X)$ ist ein reeller Vektorraum und die Abbildung $f \mapsto \int_X f \,\mathrm{d}x$ ist linear auf $\mathfrak{L}^1(X)$.

(4) $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ sind integrierbar.

(5) Ist $f \leq g$ auf X, so ist $\int_X f \, \mathrm{d}x \leq \int_X g \, \mathrm{d}x$.

(6) $|\int_X f \, \mathrm{d}x| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}x$. (Dreiecksungleichung für Integrale)

(7) Sei $\emptyset \neq Y \in \mathfrak{B}(X)$. Dann sind die Funktionen $f_{|Y} : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\mathbb{1}_Y \cdot f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und

$$\int_Y f(x) \, \mathrm{d}x := \int_Y f_{|Y}(x) \, \mathrm{d}x = \int_X (\mathbb{1}_Y \cdot f)(x) \, \mathrm{d}x$$

(8) Sei $\lambda(X) < \infty$ und $h : X \to \mathbb{R}$ sei messbar und beschränkt. Dann: $h \in \mathfrak{L}^1(X)$ und $|\int_X h \, \mathrm{d}x| \leq \|h\|_\infty \lambda(X)$ (mit $\|h\|_\infty := \sup\{|h(x)| : x \in X\}$)

Beweis

(1) folgt aus $\alpha f)_\pm = \alpha f_\pm$, falls $\alpha \geq 0$ und $\alpha f)_\pm = -\alpha f_\mp$, falls $\alpha < 0$.

(2) Es gilt $f + g = \underbrace{f_+ + g_+}_{=:u} - \underbrace{(f_- + g_-)}_{=:v} = u - v$. Dann:

$$\int_X u \mathrm{d}x = \int_X f_+ + g_+ \mathrm{d}x \overset{4.5}{=} \int_X f_+ \mathrm{d}x + \int_X g_+ \mathrm{d}x < \infty$$

Genauso: $\int_X v \mathrm{d}x < \infty$
Mit Satz 4.9 folgt: $f + g$ ist integrierbar. Weiter:

$$\begin{aligned} \int_X (f+g) \mathrm{d}x &\overset{4.9}{=} \int_X u \mathrm{d}x - \int_X v \mathrm{d}x \\ &= \int_X f_+ \mathrm{d}x + \int_X g_+ \mathrm{d}x - \left(\int_X f_- \mathrm{d}x + \int_X g_- \mathrm{d}x \right) \\ &= \int_X f \mathrm{d}x + \int_X g \mathrm{d}x \end{aligned}$$

(3) folgt aus (1) und (2).

(4) Mit Satz 3.5 folgt: $\max\{f, g\}$ ist messbar. Es gilt:

$$0 \leq |\max\{f, g\}| \leq |f| + |g|$$

Mit 4.9 und Aussage (2) folgt $|f| + |g|$ ist integrierbar. Dann folgt mit Satz 4.9: $\max\{f, g\}$ ist integrierbar.
Analog zeigt man: $\min\{f, g\}$ ist integrierbar.

(5) Nach Voraussetzung ist $f \leq g$ auf X. Dann gilt: $f_+ \leq g_+$ auf X und $f_- \geq g_-$ auf X. Es folgt:

$$\int_X f \mathrm{d}x = \int_X f_+ \mathrm{d}x - \int_X f_- \mathrm{d}x \overset{4.5}{\leq} \int_X g_+ \mathrm{d}x - \int_X g_- \mathrm{d}x = \int_X g \mathrm{d}x$$

(6) Es ist $\pm f \leq |f|$. Mit Aussage (1) und (5) folgt: $\pm \int_X f \mathrm{d}x = \int_X (\pm f) \mathrm{d}x \leq \int_X |f| \mathrm{d}x$.
Es ist $\int_X f \mathrm{d}x = |\int_X f \mathrm{d}x|$ oder $-\int_X f \mathrm{d}x = |\int_X f \mathrm{d}x|$

(7) Mit Bemerkung (2) vor 3.1 und Satz 3.6.(2) folgt: $f_{|Y}$ und $\mathbb{1}_Y \cdot f$ sind messbar. Es gilt: $(f_{|Y})_\pm = (f_\pm)_{|Y}$ und $(\mathbb{1}_Y \cdot f)_\pm = \mathbb{1} \cdot f_\pm$. Weiterhin gilt $0 \leq \mathbb{1}_Y f_\pm \leq f_\pm$. Mit 4.9 folgt dann, daß $\mathbb{1}_Y f_\pm$ integrierbar ist. Dann:

$$\begin{aligned}\int_X (\mathbb{1}_Y f)\mathrm{d}x &= \int_X \mathbb{1} f_+ \mathrm{d}x - \int_X \mathbb{1}_Y f \mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\int_Y (f_+)_{|Y}\mathrm{d}x}_{<\infty} - \underbrace{\int_Y (f_-)_{|Y}\mathrm{d}x}_{<\infty}\end{aligned}$$

Es folgt: $f_{|Y}$ ist integrierbar und $\int_Y f_{|Y}\mathrm{d}x = \int_Y (f_+)_{|Y}\mathrm{d}x - \int_Y (f_-)_{|Y}\mathrm{d}x = \int_X (\mathbb{1}_Y f)\mathrm{d}x$.

(8) Es ist $|h| \leq \|h\|_\infty \cdot \mathbb{1}_X$. Dann folgt:

$$\int_X |h|\mathrm{d}x \leq \int_X \|h\|_\infty \mathbb{1}_X \mathrm{d}x = \|h\|_\infty \lambda(X) < \infty$$

Damit: $|h|$ ist integrierbar und mit 4.9 auch h. Da h beschränkt ist, folgt: $h \in \mathfrak{L}^1(X)$. Schließlich:

$$\left|\int_X h\mathrm{d}x\right| \leq \int_X |h|\mathrm{d}x \leq \|h\|_\infty \lambda(X)$$

■

Satz 4.12

(1) Sind $\emptyset \neq A, B \in \mathfrak{B}(X)$ disjunkt, $X = A \cup B$ und ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar (über X), so ist f integrierbar über A und integrierbar über B und es gilt:

$$\int_X f \ \mathrm{d}x = \int_A f \ \mathrm{d}x + \int_B f \ \mathrm{d}x$$

(2) Ist $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f \in \mathfrak{L}^1(K)$.

Beweis

(1) Aus 4.11(7) folgt: f ist integrierbar über A und integrierbar über B. Es ist

$$\int_X f(x) \ \mathrm{d}x = \int_X (\mathbb{1}_{A\cup B} \cdot f)(x) \ \mathrm{d}x = \int_X ((\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) f)(x) \ \mathrm{d}x$$
$$= \int_X (\mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_B f)(x) \ \mathrm{d}x \overset{4.11(2)}{=} \int_X \mathbb{1}_A f \ \mathrm{d}x + \int_X \mathbb{1}_B f \ \mathrm{d}x \overset{4.11(7)}{=} \int_A f \ \mathrm{d}x + \int_B f \ \mathrm{d}x.$$

(2) K ist kompakt, also gilt: $\lambda(K) < \infty$. Aus 3.2(1) folgt, dass f messbar ist. Analysis II („stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Minimum und Maximum an“) liefert: f ist beschränkt. Insgesamt folgt mit 4.11(8) schließlich: $f \in \mathfrak{L}^1(K)$. ■

Satz 4.13

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $X := [a, b]$ und $f \in C(X)$. Dann ist $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ und es gilt:

$$L - \int_X f(x) \ \mathrm{d}x = R - \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x$$

Beweis
Sei $n \in \mathbb{N}$, $t_j^{(n)} := a + j\frac{b-a}{n}$ $(j = 0, \dots, n)$ und $I_j^{(n)} := \left[t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}\right]$ $(j = 1, \dots, n)$.

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} f\left(t_j^{(n)}\right) \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=\lambda_1\left(I_j^{(n)}\right)} \quad \text{ist Riemannsche Zwischensumme für R-} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Aus Analysis I folgt $S_n \to$ R-$\int_a^b f(x)\,dx$ $(n \to \infty)$. Definiere $f_n := \sum_{j=1}^{n} f\left(t_j^{(n)}\right) \mathbb{1}_{I_j^{(n)}}$. Dann ist f_n einfach und

$$\int_X f_n(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} f\left(t_j^{(n)}\right) \lambda_1\left(I_j^{(n)}\right) = S_n$$

f ist auf X gleichmäßig stetig also konvergiert f_n auf X gleichmäßig gegen f (Übung!), also gilt:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \to 0 \ (n \to \infty)$$

Aus 4.12(2) folgt $f \in \mathfrak{L}^1(X)$

$$\left|\text{L-}\int_X f(x)\,dx - S_n\right| = \left|\text{L-}\int_X (f - f_n)\,dx\right| \overset{4.11}{\leq} \int_X (f - f_n)\,dx \overset{4.11}{\leq} \|f - f_n\|_\infty \underbrace{\lambda(X)}_{=b-a} \to 0$$

Daraus folgt $S_n \to$ L-$\int_X f\,dx$ ∎

Satz 4.14
Sei $a \in \mathbb{R}, X := [a, \infty)$ und $f \in C(X)$. Dann gilt:

(1) f ist messbar.

(2) $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ genau dann wenn das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ **absolut** konvergent ist. In diesem Fall gilt:

$$L - \int_X f(x)\,\mathrm{d}x = R - \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

Entsprechendes gilt für die anderen Typen uneigentlicher Riemann-Integrale.

Beweis
Eine Hälfte des Beweises folgt in Kapitel 6. ∎

Beispiel

(1) Sei $X = (0,1]$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Aus Analysis I wissen wir, dass R-$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (absolut) konvergent ist. Also ist $f \in \mathfrak{L}^1(X)$.
Außerdem wissen wir aus Analysis I, dass R-$\int_0^1 \frac{1}{x}$ divergent ist. Also ist $f^2 \notin \mathfrak{L}^1(X)$.

(2) Sei $X = [0, \infty)$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Aus Analysis I wissen wir, dass R-$\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Also ist $f \notin \mathfrak{L}^1(X)$.

§ 5 Nullmengen

In diesem Paragraphen sei stets $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$. Wir schreiben wieder λ statt λ_d.

Definition
Sei $N \in \mathfrak{B}_d$. N heißt eine **(Borel-)Nullmenge**, genau dann wenn $\lambda(N) = 0$ ist.

Beispiel

(1) Ist $N \subseteq \mathbb{R}^d$ höchstens abzählbar, so ist $N \in \mathfrak{B}_d$ und $\lambda(N) = 0$.

(2) Sei $j \in \{1, \dots, d\}$ und $H_j := \big\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_j = 0\big\}$. Aus Beispiel (5) nach 2.7 folgt, dass H_j eine Nullmenge ist.

Lemma 5.1
Seien $M, N, N_1, N_2, \dots \in \mathfrak{B}_d$.

(1) Ist $M \subseteq N$ und N Nullmenge, dann ist M Nullmenge.

(2) Sind alle N_j Nullmengen, so ist auch $\bigcup N_j$ eine Nullmenge.

(3) N ist genau dann eine Nullmenge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ offene Intervalle $I_1, I_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^d$ existieren mit $N \subseteq \bigcup I_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) \leq \varepsilon$.

Beweis

(1) $0 \leq \lambda(M) \leq \lambda(N) = 0$

(2) $0 \leq \lambda(\bigcup N_j) \leq \sum \lambda(N_j) = 0$

(3) Folgt aus 2.10. ■

Bemerkung:

(1) $\mathbb{Q}$ ist „klein“: $\mathbb{Q}$ ist „nur“ abzählbar.

(2) $\mathbb{Q}$ ist „groß“: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

(3) $\mathbb{Q}$ ist „klein“: $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$

Definition

(1) Sei (E) eine Eigenschaft für Elemente in X.
(E) gilt **für fast alle** (ffa) $x \in X$, genau dann wenn (E) **fast überall** (fü) (auf X) gilt, genau dann wenn eine Nullmenge $N \subseteq X$ existiert, sodass (E) für alle $x \in X \setminus N$ gilt.

(2) $\int_\emptyset f(x)\,\mathrm{d}x := 0$

Satz 5.2
Seien $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen.

(1) Ist f integrierbar, so ist f fast überall endlich.

(2) Ist $f \geq 0$ auf X, so ist $\int_X f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ genau dann wenn fast überall $f = 0$.

(3) Ist f integrierbar und $N \subseteq X$ eine Nullmenge, so gilt:

$$\int_N f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

Beweis

(1) ist gerade 4.10.

(2) ist gerade 4.5(3)

(3) Setze $g := \mathbb{1}_N f$. Aus 4.11 folgt, dass g integrierbar ist, also ist nach 4.9 auch $|g|$ integrierbar. Für $x \in X \setminus N$ gilt:

$$g(x) = |g(x)| = 0$$

D.h. $|g| = 0$ fast überall. Aus (2) folgt damit $\int_X |g|\, dx = 0$. Dann ist mit 4.11:

$$\left| \int_X g\, dx \right| \leq \int_X |g|\, dx = 0$$

und somit $\int_X g\, dx = 0$. ■

Satz 5.3
$f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seien messbar.

(1) Ist f integrierbar und gilt fast überall $f = g$, so ist g integrierbar und es gilt:

$$\int_X f\, dx = \int_X g\, dx$$

(2) Ist f integrierbar und $g := \mathbb{1}_{\{|f|<\infty\}} \cdot f$, so ist g integrierbar und es gilt:

$$\int_X f\, dx = \int_X g\, dx$$

(3) Sind f und g beide ≥ 0 auf X, und ist fast überall $f = g$, so ist

$$\int_X f\, dx = \int_X g\, dx$$

Beweis

(1) Nach Voraussetzung existiert eine Nullmenge $N \subseteq X$, sodass gilt:

$$\forall x \in X \setminus N : f(x) = g(x)$$

Aus 5.2(3) folgt dann $\int_N f \, dx = 0$. Sei $x \in X \setminus N$ Dann gilt:

$$(\mathbb{1}_N |g|)(x) = \mathbb{1}_N(x) \cdot |g(x)| = 0$$

D.h.: Fast überall ist $\mathbb{1}_N |g| = 0$. Aus 5.2(2) folgt $\int_N |g| \, dx = \int_X \mathbb{1}_N \cdot |g| \, dx = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_X |g| \, dx &= \int_X \left(\mathbb{1}_N |g| + \mathbb{1}_{X \setminus N} |g|\right) \, dx \\ &= \int_X \mathbb{1}_N |g| \, dx + \int_X \mathbb{1}_{X \setminus N} |g| \, dx \\ &= \int_X \mathbb{1}_{X \setminus N} |g| \, dx \\ &\leq \int_X |f| \, dx \overset{4.9}{<} \infty\end{aligned}$$

4.9 liefert nun, dass $|g|$ und damit auch g integrierbar ist. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\int_X g \, dx &\overset{4.12}{=} \int_N g \, dx + \int_{X \setminus N} g \, dx = \int_{X \setminus N} g \, dx \\ &= \int_{X \setminus N} f \, dx \overset{5.2(3)}{=} \int_N f \, dx + \int_{X \setminus N} f \, dx \\ &\overset{4.12}{=} \int_X f \, dx.\end{aligned}$$

(2) Setze $N := \{|f| = \infty\}$. Aus 5.2(1) folgt, dass N eine Nullmenge ist. Sei $x \in X \setminus N$, so ist $x \in \{|f| < \infty\}$ und $g(x) = f(x)$. D.h. fast überall ist $f = g$. (Klar: g ist mb). Dann folgt die Behauptung aus (1).

(3) **Fall 1:** $\int_X f \, dx < \infty$
Dann ist f integrierbar, damit ist nach (1) auch g integrierbar und es gilt:

$$\int_X f \, dx = \int_X g \, dx$$

Fall 2: $\int_X f \, dx = \infty$.
Annahme: $\int_X g \, dx < \infty$. Dann gilt nach Fall 1: $\int_X f \, dx < \infty$. ` ∎

Definition

(f_n) sei eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

(1) (f_n) konvergiert fast überall (auf X) genau dann, wenn eine Nullmenge $N \subseteq X$ existiert, sodass für alle $x \in X \setminus N$ $(f_n(x))$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert.

(2) Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. (f_n) konvergiert fast überall (auf X) gegen f genau dann, wenn eine Nullmenge $N \subseteq X$ existiert mit: $f_n(x) \to f(x) \forall x \in X \setminus N$
In diesem Fall schreiben wir: $f_n \to f$ fast überall.

Satz 5.4
Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und (f_n) konvergiere fast überall (auf X). Dann:

(1) Es existiert $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f_n \to f$ fast überall.

(2) Ist $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion mit $f_n \to g$ fast überall, so gilt $f = g$ fast überall.

Bemerkung: Ist g wie in (2), so muss g nicht messbar sein (ein Beispiel gibt es in der Übung).

Beweis

(1) Es existiert eine Nullmenge $N_1 \subseteq X : (f_n(x))$ konvergiert in $\overline{\mathbb{R}}$ für alle $x \in X \setminus N_1$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in N_1 \\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) & x \in X \setminus N_1 \end{cases}$$

$g_n := \mathbb{1}_{X\setminus N} \cdot f_n$, g_n ist messbar und $g_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$. Mit 3.5 folgt: f ist messbar.

(2) Es existiert eine Nullmenge $N_2 \subseteq X : f_n(x) \to g(x) \, \forall x \in X \setminus N_2$. $N = N_1 \cup N_2$. Aus 5.1 folgt: N ist eine Nullmenge.

Für $x \in X \setminus N : f(x) = g(x)$. ■

Satz 5.5 (Satz von Beppo Levi (Version III))
Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, +\infty]$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte: $f_n \leq f_{n+1}$ fast überall. Dann existiert eine messbare Funktion $f : X \to [0, +\infty]$ mit: $f_n \to f$ fast überall und

$$\int_X f \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}x$$

Beweis

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Nullmenge $N_n : f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall x \in X \setminus N_n$. $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$; Mit 5.1 folgt: N ist eine Nullmenge.

Dann: $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall x \in X \setminus N \forall n \in \mathbb{N}$.

$\hat{f}_n := \mathbb{1}_{X\setminus N} \cdot f_n$, $\hat{f}_n$ ist messbar, $\hat{f}_n \leq \hat{f}_{n+1}$ auf X für alle $n \in \mathbb{N}$.

$f(x) := \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(x)$ $(x \in X)$; 3.5 liefert: f ist messbar. Weiter: $\hat{f}_n \to f$.

$$\int_X f \mathrm{d}x \overset{4.6}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \hat{f}_n \mathrm{d}x \overset{5.3.(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}x$$ ■

§ 6 Der Konvergenzsatz von Lebesgue

Stets in diesem Paragraphen: $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$

Lemma 6.1 (Lemma von Fatou)
(f_n) sei eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, +\infty]$.

(1) Es gilt:
$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n)(x)\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

(2) Ist $f : X \to [0, +\infty]$ messbar und gilt $f_n \to f$ fast überall, so ist
$$\int_X f\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\mathrm{d}x$$

(3) Ist f wie in (2) und ist $\left(\int_X f_n\mathrm{d}x\right)$ beschränkt, so ist f integrierbar.

Beweis

(1) $g_j := \inf_{n\geq j} f_n$. Aus 3.5 folgt: g_j ist messbar, klar: $g_j \leq g_{j+1}$ auf X; $\sup_{j\in\mathbb{N}} g_j = \liminf_{n\to\infty} f_n$

Weiter: $g_j \leq f_n$ $(n \geq j)$

Dann:
$$\begin{aligned}\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}x &= \int_X \sup_{j\in\mathbb{N}} g_j\mathrm{d}x \\ &= \int_X \lim_{j\to\infty} g_j(x)\mathrm{d}x \\ &\overset{4.6}{=} \lim_{j\to\infty} \int_X g_j\mathrm{d}x \\ &= \sup_{j\in\mathbb{N}} \underbrace{\int_X g_j\mathrm{d}x}_{\leq \inf_{n\geq j} \int_X f_n\mathrm{d}x} \\ &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\{\inf_{n\geq j} \int_X f_n\mathrm{d}x\right\} \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(2) Es existiert eine Nullmenge $N \subseteq X$: $f_n(x) \to f(x)\, \forall x \in X \setminus N$. Dann: $f = \mathbb{1}_{X\setminus N} \cdot f$ fast

überall.

$$\begin{aligned}\int_X f\mathrm{d}x &\overset{5.3.(3)}{=} \int_X \mathbb{1}_{X\setminus N}\cdot f\mathrm{d}x \\ &= \int_X (\lim_{n\to\infty}\mathbb{1}_{X\setminus N}f_n)\mathrm{d}x \\ &\overset{(1)}{\leq} \liminf_{n\to\infty}\int_X \mathbb{1}_{X\setminus N}f_n\mathrm{d}x \\ &\overset{5.3.(3)}{=} \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(3) folgt aus (2). Nach Voraussetzung gilt

$$0\leq \int_X f\mathrm{d}x \overset{(2)}{\leq} \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}x < \infty$$

■

Satz 6.2 (Konvergenzsatz von Lebesgue (Majorisierte Konvergenz))
(f_n) sei eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, (f_n) konvergiere fast überall und es sei $g : X \to [0, +\infty]$ integrierbar. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte $|f_n| \leq g$ fast überall. Dann sind alle f_n integrierbar und es existiert ein $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ mit:

(1) $f_n \to f$ fast überall

(2) $\int_X f_n\mathrm{d}x \to \int_X f\mathrm{d}x$

(3) $\int_X |f_n - f|\mathrm{d}x \to 0$

Beispiel
Sei $X = \mathbb{R}$, $f_n := n\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n})}$. Dann:

$$\int_X f_n\mathrm{d}x = n\cdot\lambda_1\left(\left(0,\frac{1}{n}\right)\right) = n\cdot\frac{1}{n} = 1\forall n\in\mathbb{N}$$

Es gilt $f_n \to f := 0$ punktweise und $\int_X f\mathrm{d}x = 0 \neq 1 = \int_X f_n\mathrm{d}x$. 6.2 ist ohne Majorante im allgemeinen falsch.

Beweis

(1) Aus 5.4 folgt: Es existiert $\hat{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f_n \to \hat{f}$ fast überall. Es existiert eine Nullmenge $N_0 \subseteq X : f_n(x) \to \hat{f}(x)\,\forall x \in X\setminus N_0$

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Nullmenge $N_n \subseteq X : |f_n(x)| \leq g(x)\,\forall x \in X\setminus N_n$.

Setze $N := \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$. Mit 5.1 folgt: N ist eine Nullmenge.

Wir haben: $|f_n(x)| \leq g(x)\,\forall x \in X\setminus N \forall n\in\mathbb{N}$ und $|\hat{f}(x)| \leq g(x)\,\forall x\in X\setminus N$.

(3) $f_n = \mathbb{1}_{X\setminus N}f_n$ fast überall und $\hat{f} = \mathbb{1}_{X\setminus N}\hat{f}$ fast überall.

Es gilt $|\mathbb{1}_{X\setminus N}f_n| \leq g$ und $|\mathbb{1}_{X\setminus N}\hat{f}| \leq g$. Mit 4.9 folgt: $\mathbb{1}_{X\setminus N}f_n$ und $\mathbb{1}_{X\setminus N}\hat{f}$ sind integrierbar.

Mit 5.3.(1) folgt: f_n und $\hat{f}$ sind integrierbar.

(4) $\tilde{N} := N \cup \{|\hat{f}| = \infty\} \cup \{g = \infty\}$. Mit 4.10 und 5.1 folgt: $\tilde{N}$ ist eine Nullmenge.

Setze $f := \mathbb{1}_{X \setminus N} \hat{f}$. Dann: f ist messbar; es ist $|f| \leq |\hat{f}|$. Mit 4.9 folgt: f ist integrierbar.

Es ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$. Also: $f \in \mathfrak{L}^1(X)$.

Sei $x \in X \setminus \tilde{N}:\ f(x) = \tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. D.h. $f_n \to f$ fast überall.

(5) Definiere $g_n := |f| + \mathbb{1}_{X\setminus\tilde{N}} g - \mathbb{1}_{X\setminus\tilde{N}} |f_n - f|$. Es ist fast überall

$$\mathbb{1}_{X\setminus\tilde{N}} g = g \qquad\qquad \mathbb{1}_{X\setminus\tilde{N}} |f_n - f| = |f_n - f|$$

Nach 5.3(1) ist g integrierbar und $g_n \to |f| + g$ fast überall. Es gilt:

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + |f| \text{ auf} X \setminus \tilde{N}$$

D.h. es ist $g \geq 0$ auf X.

(6) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_X (|f| + g)\ \mathrm{d}x &\overset{6.1(2)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n\ \mathrm{d}x \\
&= \liminf \left(\int_{\tilde{N}} g_n\ \mathrm{d}x + \int_{X\setminus\tilde{N}} g_n\ \mathrm{d}x \right) \\
&= \liminf \int_{X\setminus\tilde{N}} g_n\ \mathrm{d}x \\
&= \liminf \int_{X\setminus\tilde{N}} (|f| + g - |f_n - f|)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{X\setminus\tilde{N}} (|f| + g)\ \mathrm{d}x - \limsup \int_{X\setminus\tilde{N}} |f_n - f|\ \mathrm{d}x \\
&\overset{5.2(3)}{=} \int_X |f| + g\ \mathrm{d}x - \limsup \int_X |f_n - f|\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\limsup \int_x |f_n - f|\ \mathrm{d}x \leq 0$$

Also gilt auch:

$$|\int_X f_n\ \mathrm{d}x - \int_X f\ \mathrm{d}x| = |\int_X (f_n - f)\ \mathrm{d}x \leq \int_X |f_n - f|\ \mathrm{d}x \to 0$$

■

Beispiel
Sei $X := [1, \infty)$ und $f_n(x) := \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ für alle $x \in X, n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) \to f(x) \equiv 0$ für jedes $x \in X$. Dann ist $|f_n(x)| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$. Definiere nun

$$g(x) := \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Aus Analysis I ist bekannt, dass $\int_1^\infty g(x)\, dx$ (absolut) konvergent ist und aus 4.14 folgt

$$g \in \mathfrak{L}^1(X) \text{ sowie } \int_X g(x)\, dx = \text{R-} \int_1^\infty g(x)\, dx$$

Weiter folgen aus 6.2:

$$\int_X f_n\,dx \to 0 \text{ und } \int_X |f_n|\,dx \to 0 \ (n \to \infty)$$

Folgerung 6.3 (aus 6.2)

(1) Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und (A_n) sei eine Folge in $\mathfrak{B}(X)$ mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup A_n$. Weiter sei

$$f_n := \mathbb{1}_{A_n} \cdot f \text{ integrierbar für alle } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\left(\int_{A_n} |f|\,dx\right) \text{ sei beschränkt.}$$

Dann ist f integrierbar und es gilt:

$$\int_{A_n} f\,dx \to \int_X f\,dx \quad \text{für } n \to \infty$$

(2) Sei $a \in \mathbb{R}$, $X := [a, \infty]$ und $f : X \to \mathbb{R}$ sei stetig. Weiter sei R-$\int_a^\infty f\,dx$ **absolut** konvergent. Dann ist $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ und wie in 4.14:

$$\text{L-}\int_X f\,dx = \text{R-}\int_a^\infty f\,dx$$

Beweis

(1) Sei $x \in X$. Es exisitert ein $m \in \mathbb{N}$, für das $x \in A_m$ ist und somit auch $x \in A_n$ für jedes $n \geq m$. Nach der Definition von f_n gilt dann $f_n(x) = f(x)$ für jedes $n \geq m$ und somit $f_n \to f$ auf X. Damit gilt auch

$$|f_n| \to |f| \text{ auf } X$$

Durch die Konstruktion der f_n ergibt sich:

$$|f_n| = |\mathbb{1}_{A_n} f| = \mathbb{1}_{A_n}|f| \leq \mathbb{1}_{A_{n+1}}|f| = |f_{n+1}|$$

Dann gilt:

$$\int_X |f|\,dx \overset{4.6}{=} \lim \int_X |f_n|\,dx = \lim \int_{A_n} |f|\,dx \overset{Vor.}{<} \infty$$

Es folgt, dass $|f|$ integrierbar ist und somit ist nach 4.9 auch f integrierbar. Da $|f_n| \leq |f|$ auf X für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist f eine integrierbare Majorante und es folgt mit 6.2:

$$\int_X f\,dx = \lim \int_X f_n\,dx = \lim \int_{A_n} f\,dx$$

(2) Setze $A_n := [a, n]$ $(n \in \mathbb{N})$ und es gelte o.B.d.A.: $a \leq 1$. Dann gilt:

$$\int_{A_n} |f|\,dx \overset{4.13}{=} \text{R-}\int_a^n |f|\,dx \xrightarrow{Vor.} \text{R-}\int_a^\infty |f|\,dx$$

D.h. $\left(\int_{A_n} |f|\,dx\right)$ ist beschränkt. Definiere $f_n := \mathbb{1}_{A_n} f$ mit 4.13 folgt daraus, dass f_n integrierbar ist. Weiter folgt aus (1) $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ (denn es ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$) und

$$\text{L-}\int_X f\,dx = \lim \int_{A_n} f\,dx \overset{4.13}{=} \lim \left(\text{R-}\int_a^n f\,dx\right) = \text{R-}\int_a^\infty f\,dx. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung: 6.3(2) gilt entsprechend für die anderen Typen uneigentlicher Riemann-Integrale.

Folgerung 6.4

(1) (f_n) sei eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g\colon X \to [0, +\infty]$ sei ebenfalls integrierbar und

$$g_n := f_1 + f_2 + \ldots + f_n \ (n \in \mathbb{N})$$

Weiter sei N eine Nullmenge in X so, dass $(g_n(x))$ für jedes $x \in X \setminus N$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert und

$$|g_n(x)| \leq g(x) \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in X \setminus N$$

Setzt man

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in N \\ \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x), & \text{falls } x \in X \setminus N \end{cases},$$

so gilt, dass f integrierbar ist und

$$\int_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_X f_j(x)\, dx \right)$$

(2) Sei $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ und (A_n) eine **disjunkte** Folge in $\mathfrak{B}(X)$ mit $X = \dot{\bigcup} A_n$. Dann gilt

$$\int_X f\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f\, dx$$

Beweis

(1) Fast überall gelten $g_n \to f$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch $|g_n| \leq g$. Aus 6.2 folgt

$$\begin{aligned}
\int_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \right) dx &= \int_X f\, dx \\
&\overset{6.2}{=} \lim \int_X g_n\, dx \\
&= \lim \int_X \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \right) dx \\
&= \lim \sum_{j=1}^{n} \int_X f_j(x)\, dx \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j\, dx
\end{aligned}$$

(2) Setze $f_j := \mathbb{1}_{A_j} f$, $g := |f|$, $g_n := f_1 + \ldots + f_n$. Dann ist

$$|g_n| = |\mathbb{1}_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} \cdot f| \leq |f| = g$$

Es gilt: $g_n \to f$ auf X. Aus (1) folgt

$$\int_X f\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f\, dx$$

■

§ 7 Parameterintegrale

In diesem Paragraphen sei stets $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$.

Satz 7.1
Sei $U \in \mathfrak{B}_k, t_0 \in U$ und es sei $f\colon U \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit:

(1) Für jedes $t \in U$ ist $x \mapsto f(t,x)$ messbar.

(2) Es existiert eine Nullmenge $N \subseteq X$ so, dass $t \mapsto f(t,x)$ für jedes $x \in X \setminus N$ stetig in t_0 ist.

(3) Es existiert eine integrierbare Funktion $g\colon X \to [0,\infty]$ und zu jedem $t \in U$ existiert eine Nullmenge $N_t \subseteq X$ so, dass für jedes $t \in U$ und jedes $x \in X \setminus N_t$ gilt:

$$|f(t,x)| \leq g(x)$$

Dann ist $x \mapsto f(t,x)$ für jedes $t \in U$ integrierbar. Ist $F\colon U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(t) := \int_X f(t,x)\,dx,$$

so ist F stetig in t_0.

Also:

$$\lim_{t\to t_0} \int_X f(t,x)\,dx = \lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0) = \int_X f(t_0,x)\,dx = \int_X \lim_{t\to t_0} f(t,x)\,dx$$

Beweis
Aus (1) und (3) folgt, dass $x \mapsto f(t,x)$ für jedes $t \in U$ integrierbar ist (zur Übung). Sei (t_n) eine Folge in U mit $t_n \to t_0$ und

$$g_n(x) := f(t_n,x) \ (n \in \mathbb{N}, x \in X)$$

Setze

$$\tilde{N} := N \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_{t_n} \right)$$

Aus 5.1 folgt, dass $\tilde{N}$ eine Nullmenge ist. Voraussetzung (2) liefert $g_n(x) \to f(t_0,x)$ für jedes $x \in X \setminus \tilde{N}$, also gilt

$$g_n(x) \to f(t_0,x) \text{ fast überall auf } X$$

Voraussetzung (3) liefert $|g_n(x)| = |f(t_n, x)| \leq g(x)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X \setminus \tilde{N}$. Aus 6.2 folgt

$$F(t_n) = \int_X f(t_n, x)\, dx = \int_X g_n\, dx \longrightarrow \int_X f(t_0, x)\, dx = F(t_0)$$

■

Bezeichnung
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a := \inf I$ und $b := \sup I$, wobei $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ zugelassen sind. Weiter sei $f\colon I \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar (oder f ist messbar und ≥ 0) und

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx := \int\limits_{(a,b)} f_{|(a,b)}(x)\, dx$$

Dann ist

$$\int_I f(x)dx = \int_{(a,b)} f(x)dx$$

Ist z.B. $I = [a, b)$, dann gilt, da $\{a\}$ eine Nullmenge ist:

$$\int_I f\, dx = \int_{\{a\}} f\, dx + \int_{(a,b)} f\, dx = \int_{(a,b)} f\, dx$$

Folgerung 7.2
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a = \inf I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei integrierbar. Definiert man $F\colon I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) := \int_a^t f(x)\, dx,$$

so ist $F \in C(I)$.

Beweis
Für $x, t \in I$ definiere $h(t, x) := \mathbb{1}_{(a,t)} f(x)$. Dann ist $F(t) = \int_I h(t, x)\, dx$ und

$$|h(t, x)| = \mathbb{1}_{(a,t)} \cdot |f(x)| \leq |f(x)| \text{ für alle } t, x \in I$$

Aus 4.9 folgt, dass $|f|$ integrierbar ist. Sei $t_0 \in I$ und $N := \{t_0\}$, also eine Nullmenge. Dann ist $t \mapsto h(t, x)$ für jedes $x \in I \setminus N$ stetig in t_0 (zur Übung). Die Behauptung folgt aus 7.1. ■

Satz 7.3
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f\colon U \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es sei $g\colon X \to [0, +\infty]$ integrierbar und $N \subseteq X$ sei eine Nullmenge. Weiter gelte:

(1) für jedes $t \in U$ sei $x \mapsto f(t, x)$ integrierbar.

(2) für jedes $x \in X \setminus N$ sei $t \mapsto f(t, x)$ partiell differenzierbar auf U.

(3) $\left|\frac{\partial f}{\partial t_j}\right| \leq g(x)$ für jedes $x \in X \setminus N$, jedes $t \in U$ und jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$

Ist dann $F\colon U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(t) := \int_X f(t, x) dx$$

so ist F auf U partiell differenzierbar und für jedes $t \in U$ sowie jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$ gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_j}(t, x)\, dx$$

Also: $\frac{\partial}{\partial t_j} \int_X f(t,x)\,dx = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)\,dx.$

Beweis
Sei o.B.d.A. $k = 1$, also $U \subseteq \mathbb{R}$. Sei $t_0 \in U$ und (h_n) eine Folge mit $h_n \to 0$ und $h_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$g_n(x) := \frac{f(t_0 + h_n, x) - f(t_0, x)}{h_n} \quad (x \in X, n \in \mathbb{N})$$

Aus Voraussetzung (2) folgt für jedes $x \in X \setminus N$:

$$g_n(x) \to \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \quad (n \to \infty)$$

Nach dem Mittelwertsatz aus Analysis 1 existiert für jedes $x \in X \setminus N$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $s_n = s_n(x)$ zwischen t_0 und $t_0 + h_n$ mit:

$$|g_n(x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s_n, x) \right| \overset{(3)}{\leq} g(x)$$

Aus 6.2 folgt

$$\int_X g_n\,dx \longrightarrow \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\,dx$$

Es ist nach Konstruktion gerade $\int_X g_n\,dx = \frac{F(t_0+h_n)-F(t_0)}{h_n}$. ∎

§ 8 Vorbereitungen auf das, was kommen mag

In diesem Paragraphen seien $k, l, d \in \mathbb{N}$ und $k + l = d$. $\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$. Für Punkte $z \in \mathbb{R}^d$ schreiben wir $z = (x, y)$, wobei $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^l$.

Definition

(1) $p_1 \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ sei definiert durch $p_1(x, y) := x$

(2) $p_2 \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^l$ sei definiert durch $p_2(x, y) := y$

(3) Für $y \in \mathbb{R}^l$ sei $j_y \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $j_y(x) := (x, y)$

(4) Für $x \in \mathbb{R}^k$ sei $j^x \colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $j^x(y) := (x, y)$

Lemma 8.1
p_1, p_2, j_y, und j^x sind messbar.

Beweis
p_1, p_2, j_y und j^x sind stetig, also nach 3.2 messbar. ■

Definition
Sei $C \subseteq \mathbb{R}^d$.
Sei $y \in \mathbb{R}^l$, dann heißt $C_y := \{x \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in C\} = (j_y)^{-1}(C)$ der **y-Schnitt** von C.
Sei $x \in \mathbb{R}^k$, dann heißt $C^x := \{y \in \mathbb{R}^l : (x, y) \in C\} = (j^x)^{-1}(C)$ der **x-Schnitt** von C.

Lemma 8.2
Sei $C \in \mathfrak{B}_d$. Dann ist $C_y \in \mathfrak{B}_k$ und $C^x \in \mathfrak{B}_l$.

Beweis
folgt aus 8.1. ■

Beachte: Sei $A \in \mathbb{R}^k$ und $B \in \mathbb{R}^l$, sowie $C := A \times B \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann:

$$C_y = \begin{cases} \emptyset, \text{falls } y \notin B \\ A, \text{falls } y \in B \end{cases} \qquad C^x = \begin{cases} \emptyset, \text{falls } x \notin A \\ B, \text{falls } x \in A \end{cases}$$

Lemma 8.3
Sei $A \in \mathfrak{B}_k$ und $B \in \mathfrak{B}_l$. Dann ist $C := A \times B \in \mathfrak{B}_d$.

Beweis
Es ist
$$C = (A \times \mathbb{R}^l) \cap (\mathbb{R}^k \times B) = p_1^{-1}(A) \cap p_2^{-1}(B)$$
Nach 8.1 sind $p_1^{-1}(A), p_2^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_d$ und somit ist auch $p_1^{-1}(A) \cap p_2^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_d$ ∎

Definition
Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$.
Für $y \in \mathbb{R}^l$:
$$f_y(x) := f(x,y) \quad (x \in \mathbb{R}^k)$$
Für $x \in \mathbb{R}^k$:
$$f^x(y) := f(x,y) \quad (y \in \mathbb{R}^l)$$
Es ist $f_y = f \circ j_y$ und $f^x = f \circ j^x$.

Lemma 8.4
Ist $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so sind f_y und f^x messbar.

Beweis
folgt aus 8.1 und 8.3. ∎

Definition und Satz 8.5 (ohne Beweis)
Sei $C \in \mathfrak{B}_d$. Die Funktionen φ_C und ψ_C seien unter Beachtung von 8.2 definiert durch:
$$\varphi_C(x) := \lambda_l(C^x) \quad (x \in \mathbb{R}^k) \qquad\qquad \psi_C(x) := \lambda_k(C_y) \quad (y \in \mathbb{R}^l)$$
Dann sind φ_C und ψ_C messbar.

Bemerkung: Für $C \in \mathfrak{B}_d$ gilt:
$$\varphi_C(x) = \lambda_l(C^x) = \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_{C^x}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_C(x,y)\,dy$$
$$\psi_C(y) = \lambda_k(C_y) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_{C_y}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_C(x,y)\,dx$$

§ 9 Das Prinzip von Cavalieri

Die Bezeichnungen seien wie im Paragraphen 8.

Satz 9.1 (Prinzip von Cavalieri)
Sei $C \in \mathfrak{B}_d$. Dann:

$$\lambda_d(C) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(C^x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda_k(C_y)\,dy$$

Das heißt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_C(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_C(x,y)\,dy \right)\,dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_C(x,y)\,dx \right)\,dy$$

Beispiel

(1) Sei $k = l = 1$, also $d = 2$. Sei $r > 0$ und

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

Da C abgeschlossen ist, gilt $C \in \mathfrak{B}_2$.
Ist $|y| > r$, so ist $C_y = \emptyset$, also $\lambda_1(C_y) = 0$.
Sei also $|y| \leq r$. Sei $x \in \mathbb{R}$ so, dass $(x,y) \in \partial C$. Dann ist $x^2+y^2 = r^2$, also $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$.
Das heißt, es ist

$$C_y = \left[-\sqrt{r^2-y^2}, +\sqrt{r^2-y^2}\right] \text{ und } \lambda_1(C_y) = 2\sqrt{r^2-y^2}$$

Aus 9.1 folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda_2(C) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(C_y)\,dy \\
&= \int_{[-r,r]} \lambda_1(C_y)\,dy + \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} \lambda_1(C_y)\,dy \\
&= \int_{[-r,r]} 2\sqrt{r^2-y^2}\,dy \\
&\overset{4.13}{=} \text{R-}\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-y^2}\,dy \\
&\overset{AnaI}{=} \pi r^2
\end{aligned}$$

(2) Sei $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^d$. X sei kompakt, also $X \in \mathfrak{B}_d$. Weiter sei $f\colon X \to [0,\infty)$ stetig, woraus mit 4.11 $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ folgt. Setze

$$C := \{(x,y) : x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

C ist kompakt und somit gilt: $C \in \mathfrak{B}_{d+1}$.
Ist $x \notin X$, so ist $C^x = \emptyset$, also $\lambda_1(C^x) = 0$.
Ist $x \in X$, so ist $C^x = [0, f(x)]$, also $\lambda_1(C^x) = f(x)$. Damit gilt

$$\lambda_{d+1}(C) \overset{9.1}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_1(C^x)\,dx = \int_X \lambda_1(C^x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus X} \lambda_1(C^x)\,\mathrm{d}x = \int_X f(x)\,dx$$

(3) Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon I \to [0, \infty]$ stetig. Setze

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Aus Beispiel (2) und 4.13 folgt

$$\lambda_2(C) = \text{R-}\int_a^b f(x)\,dx$$

(4) X und f seien wie in Beispiel (2). Setze

$$G := \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

G ist kompakt, also ist $G \in \mathfrak{B}_2$. Ist $x \notin X$, so ist $G^x = \emptyset$, also $\lambda_1(G^x) = 0$. Ist $x \in X$, so ist $G^x = \{f(x)\}$, also $\lambda_1(G^x) = 0$. Aus 9.1 folgt

$$\lambda_2(G) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(G^x)\,dx = 0$$

Beweis (Prinzip von Cavalieri)
Wir definieren $\mu, \nu : \mathfrak{B}_d \to [0, \infty]$ durch:

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(A^x)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \nu(A) := \int_{\mathbb{R}^l} \lambda_k(A_y)\,\mathrm{d}y$$

Dann ist klar, dass $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = \lambda_d(\emptyset) = 0$ ist.
Sei (A_j) eine disjunkte Folge in $\mathfrak{B}_d$. Dann ist (A_j^x) ebenfalls disjunkt und $(\bigcup A_j)^x = \bigcup A_j^x$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup A_j) &= \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(\bigcup A_j^x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \sum \lambda_l(A_j^x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(A_j^x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum \mu(A_j)
\end{aligned}$$

D.h. μ ist ein Maß auf $\mathfrak{B}_d$. Analog lässt sich zeigen, dass ν ein Maß auf $\mathfrak{B}_d$ ist.
Sei nun $I \in \mathcal{I}_d$, dann existieren $I' \in \mathcal{I}_k, I'' \in \mathcal{I}_l$ mit $I = I' \times I''$. Aus §8 folgt:

$$I^x = \begin{cases} I'' & , x \in I' \\ \emptyset & , x \notin I' \end{cases}$$

Also ist $\lambda_l(I^x) = \lambda_l(I'') \cdot \mathbb{1}_{I'}(x)$ und damit:

$$\begin{aligned}
\mu(I) &= \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(I'') \cdot \mathbb{1}_{I'}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda_l(I'') \cdot \lambda_k(I') = \lambda_d(I)
\end{aligned}$$

D.h. auf $\mathcal{I}_d$ stimmen μ und λ_d überein. Analog gilt $\nu = \lambda_d$ auf $\mathcal{I}_d$. Da $\mathcal{I}_d$ die Vorraussetzungen des Satzes 2.6 erfüllt, gilt $\mu = \lambda_d = \nu$ auf $\mathfrak{B}_d$. ∎

Folgerung 9.2

(1) Sei $N \in \mathfrak{B}_d$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_d(N) = 0 &\iff \lambda_l(N^x) = 0 \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}^k \\ &\iff \lambda_k(N_y) = 0 \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}^l \end{aligned}$$

(2) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$ ($M \subseteq \mathbb{R}^l$) eine Nullmenge, dann ist $M \times \mathbb{R}^l$ ($\mathbb{R}^k \times M$) eine Nullmenge.

Beweis

(1) Nach 9.1 gilt:

$$\lambda_d(N) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(N^x) \, \mathrm{d}x$$

Nach 5.2(2) folgt die Behauptung. Analog lässt sich die zweite Äquivalenz zeigen.

(2) Es gilt:

$$\forall y \in \mathbb{R}^l : (M \times \mathbb{R}^l)_y = M$$

Damit folgt die Behauptung aus (1). ∎

Lemma 9.3
Sei $\emptyset \neq D \in \mathfrak{B}_d$ und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Definiere

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & , z \in D \\ 0 & , z \notin D \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

Beweis
Sei $a \in \mathbb{R}$, $B_a := \{n \in \mathbb{R}^d \mid \tilde{f}(z) \leq a\}$.
Fall $a < 0$:

$$B_a = \{z \in D \mid f(z) \leq a\} \overset{3.4}{\in} \mathfrak{B}_d$$

Fall $a \geq 0$:

$$B_a = \{z \in D \mid f(z) \leq a\} \cup \{z \in \mathbb{R}^d \setminus D\} \in \mathfrak{B}_d$$

Also folgt aus 3.4 die Messbarkeit von $\tilde{f}$. ∎

Beispiel

(1) Sei $r > 0$ und

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$$

Dann ist K offen, also $K \in \mathfrak{B}_2$ und es gilt:

$$\partial K = \overline{K} \setminus K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\} \in \mathfrak{B}_2$$

Damit enthält die Menge $(\partial K)_y$ für alle $x \in \mathbb{R}$ höchstens zwei Elemente, d.h.

$$\lambda_2(\partial K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1((\partial K)_y) \, \mathrm{d}y = 0$$

Mit $\overline{K} = (\partial K)\dot{\cup}K$ folgt dann

$$\lambda_2(K) = \lambda_2(\partial K) + \lambda_2(\overline{K}) = \lambda_2(\overline{K}) = \pi r^2$$

Sei nun $A \in \mathfrak{B}_2$ mit $K \subseteq A \subseteq \overline{K}$, dann ist $\lambda_2(A) = \pi r^2$.

(2) Sei $r > 0$ und

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

Dann ist K abgeschlossen, also $K \in \mathfrak{B}_3$.
Fall $|z| > r$: Es ist $K_z = \emptyset$, also $\lambda_2(K_z) = 0$.
Fall $|z| \geq r$: Es ist

$$K_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2\}$$

und damit $\lambda_2(K_z) = \pi(r^2 - z^2)$.
Aus 9.1 folgt dann:

$$\begin{aligned}
\lambda_3(K) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(K_z)\ \mathrm{d}z \\
&= \int_{[-r,r]} \lambda_2(K_z)\ \mathrm{d}z + \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} \lambda_2(K_z)\ \mathrm{d}z \\
&= \int_{[-r,r]} \pi(r^2 - z^2)\ \mathrm{d}z \\
&\overset{4.13}{=} \int_{-r}^{r} \pi r^2 - \pi z^2\ \mathrm{d}z \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}$$

(3) $\lambda_2\left(☺\right) = 0$

(4) Wir wollen nun **Rotationskörper** betrachten. Sei dazu $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : I \to [0,\infty)$ messbar. Definiere nun

$$V := \{(x,y,z,) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq f(z)^2, z \in I\}$$

Setze $D := \mathbb{R}^2 \times I$ und $g(x,y,z) := x^2 + y^2 - f(z)^2$. Dann ist g nach §3 messbar und $V = \{g \leq 0\} \in \mathfrak{B}_3$.
Fall $z \notin I$: Es so ist $V_z = \emptyset$, also $\lambda_2(V_z) = 0$.
Fall $z \in I$: Es ist

$$V_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$$

und damit $\lambda_2(V_z) = \pi f(z)^2$.
Aus 9.1 folgt dann:

$$\begin{aligned}
\lambda_3(V) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(V_z)\ \mathrm{d}z \\
&= \pi \int_a^b f(z)^2\ \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

(5) Sei $h > 0$, $I = [0,h]$ und $f(z) = \frac{r}{h}z$. Definiere den Kegel

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{h^2}z^2\}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda_3(V) &= \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} z^2 \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi r^2 h}{3}\end{aligned}$$

§ 10 Der Satz von Fubini

Die Bezeichnungen seien wie in den Paragraphen 8 und 9.

Satz 10.1 (Satz von Tonelli)
Es sei $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ messbar. (Aus §8 folgt dann, dass f^x, f_y messbar sind, wobei klar ist, dass $f^x, f_y \geq 0$ sind.)
Für $x \in \mathbb{R}^k$:

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^l} f^x(y)\,dy$$

Für $y \in \mathbb{R}^l$:

$$G(y) := \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x)\,dx$$

Dann sind F, G messbar und

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^k} F(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^l} G(y)\,dy$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx \right) dy \qquad (*)$$

(iterierte Integrale)

Beweis
Fall 1: Sei $C \in \mathfrak{B}_d$ und $f = \mathbb{1}_C$. Die Behauptungen folgen dann aus 9.1.
Fall 2: Sei $f \geq 0$ und einfach. Die Behauptungen folgen aus Fall 1, 3.6 und 4.5.
Fall 3 - Der allgemeine Fall:
Sei (f_n) zulässig für f, also: $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$, f_n einfach und $f_n \to f$ auf $\mathbb{R}^d$. Für $x \in \mathbb{R}^k$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$F_n(x) := \int_{\mathbb{R}^l} f_n(x,y)\,dy$$

und nach Fall 2 ist F_n messbar.
Aus $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ folgt $0 \leq F_n \leq F_{n+1}$ und 4.6 liefert $F_n \to F$ auf $\mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,dz = \lim \int_{\mathbb{R}^d} f_n(z)\,dz \overset{Fall2}{=} \lim \int_{\mathbb{R}^k} F_n(x)\,dx \overset{4.6}{=} \int_{\mathbb{R}^k} F(x)\,dx$$

Genauso zeigt man

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^l} G(y)\,dy$$

■

Satz 10.2 (Satz von Fubini (Version I))
Es sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann existieren Nullmengen $M \subseteq \mathbb{R}^k$ und $N \subseteq \mathbb{R}^l$ mit

$$f^x\colon \mathbb{R}^l \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ist integrierbar für jedes } x \in \mathbb{R}^k \setminus M$$
$$f_y\colon \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ist integrierbar für jedes } y \in \mathbb{R}^l \setminus N$$

Setze

$$F(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^l} f^x(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)\,dy & \text{, falls } x \in \mathbb{R}^k \setminus M \\ 0 & \text{, falls } x \in M \end{cases}$$

und

$$G(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx & \text{, falls } y \in \mathbb{R}^l \setminus N \\ 0 & \text{, falls } y \in N \end{cases}$$

Dann sind F und G integrierbar und es gelten folgende zwei Gleichungen

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^k} F(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^l} G(y)\,dy$$

Es gilt also wieder $(*)$ aus 10.1.

Beweis
Wir zeigen nur die Aussagen über f^x, F und die erste der obigen beiden Gleichungen. Genauso zeigt man die Aussagen über f_n, G und die zweite Gleichung.
Aus 8.1 folgt, dass f^x messbar ist. Definiere

$$\Phi(x) := \int_{\mathbb{R}^l} |f^x(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^l} |f(x,y)|\,dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^k$$

Nach 10.1 ist Φ messbar und

$$\int_{\mathbb{R}^k} \Phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} |f(x,y)|\,dy \right) dx \overset{10.1}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|\,dz < \infty$$

(denn mit f ist nach 4.9 auch $|f|$ integrierbar). Somit ist Φ integrierbar. Setze $M := \{\Phi = \infty\}$ was nach 4.10 eine Nullmenge ist. Also gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^l} |f^x(y)|\,dy = \Phi(x) < \infty \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^k \setminus M$$

Das heißt, $|f^x|$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}^k \setminus M$ integrierbar und es gilt nach 4.9 auch

$$f^x \text{ ist integrierbar für jedes } x \in \mathbb{R}^k \setminus M$$

Aus 9.2 folgt, dass $M \times \mathbb{R}^l$ eine Nullmenge ist. Setze

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{, falls } z \in \mathbb{R}^d \setminus (M \times \mathbb{R}^l) \\ 0 & \text{, falls } z \in M \times \mathbb{R}^l \end{cases}$$

Aus 9.3 folgt, dass $\tilde{f}$ messbar ist. Klar ist, dass fast überall $f = \tilde{f}$ gilt. Es ist

$$\tilde{f}^x = \left(\mathbb{1}_{(M\times\mathbb{R}^l)^C} \cdot f\right)^x$$

Das heißt $\tilde{f}^x$ ist integrierbar für jedes $x \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$F(x) \overset{5.3}{=} \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}(x,y)\,dy = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_+(x,y)\,dy}_{=:F^+(x)} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_-(x,y)\,dy}_{=:F^-(x)}$$

Nach 10.1 sind F^+ und F^- messbar. Die Dreiecksungleichung liefert nun

$$|F(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^l} |\tilde{f}(x,y)|\,dy \overset{5.3}{=} \int_{\mathbb{R}^l} |f(x,y)|\,dy = \Phi(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^k$$

Also ist $|F| \leq \Phi$ und Φ ist integrierbar. Aus 4.9 folgt, dass F und $|F|$ integrierbar sind und dann sind auch F^+ und F^- integrierbar (zur Übung). Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^k} F(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^k} F^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^k} F^-(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_+(x,y)\,dy\right) dx - \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}(x,y)\,dy\right) dx \\
&\overset{10.1}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_+(z)\,dz - \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_-(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,dz
\end{aligned}$$

■

Satz 10.3 (Satz von Fubini (Version II))
Sei $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_k$, $\emptyset \neq Y \in \mathfrak{B}_l$ und $D := X \times Y$ (nach §8 ist $D \in \mathfrak{B}_d$). Es sei $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Ist $f \geq 0$ auf D oder ist f integrierbar, so gilt

$$\int_D f(x,y)\,d(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right) dy$$

Beweis
Definiere $\tilde{f}$ wie in 9.3 und wende 10.1 beziehungsweise 10.2 an. ■

Bemerkung: 10.1, 10.2 und 10.3 gelten natürlich auch für mehr als zwei iterierte Integrale.

“Gebrauchsanweisung“ für Fubini:
Gegeben: $\emptyset \neq D \subseteq \mathfrak{B}_d$ und messbares $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$. Setze f auf $\mathbb{R}^d$ zu einer messbaren Funktion $\tilde{f}$ fort (zum Beispiel wie in 9.3). Aus 3.8 folgt dann, dass $\mathbb{1}_D\tilde{f}$ messbar ist und 10.1 liefert

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_D\tilde{f}|\,dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} |\mathbb{1}_D\tilde{f}|\,dy\right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} |\mathbb{1}_D\tilde{f}|\,dx\right) dy$$

Ist eines der drei obigen Integrale endlich, so ist $|\mathbb{1}_D\tilde{f}|$ integrierbar und damit ist nach 4.9 auch $\mathbb{1}_D\tilde{f}$ integrierbar.
Dann ist f integrierbar und es folgt

$$\begin{aligned}\int_D f(z)\,dz &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\mathbb{1}_D\tilde{f}\right)(z)\,dz \\ &\overset{10.2}{=} \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \left(\mathbb{1}_D\tilde{f}\right)(x,y)\,dy\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \left(\mathbb{1}_D\tilde{f}\right)(x,y)\,dx\right)dy\end{aligned}$$

Beispiel

(1) Sei $D = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_d,b_d]$ mit $a_i \le b_i$ $(i = 1,\dots,d)$. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig. D ist kompakt, also gilt $D \in \mathfrak{B}_d$. Nach 4.12(2) ist $f \in \mathfrak{L}^1(D)$ und aus obiger Bemerkung folgt

$$\int_D f(x_1,\dots,x_d)\,d(x_1,\dots,x_d) = \int_{a_d}^{b^d}\left(\cdots\left(\int_{a_2}^{b^2}\left(\int_{a_1}^{b^1} f(x_1,\dots,x_d)\,dx_1\right)dx_2\right)\cdots\right)dx_d$$

Die Reihenfolge der Integrationen darf beliebig vertauscht werden. Aus 4.13 folgt

$$\int_{a_i}^{b_i}\cdots\,\mathrm{d}x_i = \text{R-}\int_{a_i}^{b_i}\cdots\,\mathrm{d}x_i$$

Konkretes Beispiel
Sei $D := [a,b]\times[c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C([a,b])$ und $g \in C([c,d])$.

$$\begin{aligned}\int_D f(x)g(y)\,d(x,y) &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x)g(y)\,dx\right)dy \\ &= \int_c^d \left(g(y)\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\right)dy \\ &= \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)\end{aligned}$$

(2) Wir rechtfertigen die “Kochrezepte“ aus Analysis II, Paragraph 15. Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I := [a,b]$. Weiter seien $h_1,h_2 \in C(I)$ mit $h_1 \le h_2$ auf I und

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$$

Sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig. Da h_1 und h_2 stetig sind, ist A kompakt und somit gilt $A \in \mathfrak{B}_2$. Aus 4.12(2) folgt dann $f \in \mathfrak{L}^1(A)$. Definiere

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{, falls } (x,y) \in A \\ 0 & \text{, falls } (x,y) \notin A\end{cases}$$

Nach 9.3 ist $\tilde{f}$ messbar. Setze

$$M := \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in A\}$$

Dann gilt $|\tilde{f}| \leq M \cdot \mathbb{1}_A$. Wegen $\lambda_2(A) < \infty$ ist $M \cdot \mathbb{1}_A$ integrierbar und nach 4.9 ist $|\tilde{f}|$ und damit auch $\tilde{f}$ integrierbar. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_A f(x,y)\,d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(x,y)\,d(x,y) \\
&\overset{10.3}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx
\end{aligned}$$

Damit ist 15.1 aus Analysis II bewiesen. Genauso zeigt man 15.3.

(3) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$ und $f(x,y) := \frac{1}{x}\cos(xy)$. D ist abgeschlossen und somit ist $D \in \mathfrak{B}_2$. Außerdem ist f stetig, also messbar.
Behauptung:

$$f \in \mathfrak{L}^1(D) \text{ und } \int_D f(x,y)\,d(x,y) = \sin(1)$$

Beweis: Setze $X := (0,\infty)$, $Y := [0,\infty)$ und $Q := X \times Y$. Sei nun

$$\tilde{f}(x,y) := \frac{1}{x}\cos(xy) \text{ für } (x,y) \in Q$$

$\tilde{f}$ ist eine Fortsetzung von f auf $X \times Y$. $\tilde{f}$ ist also messbar. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_D |f|\,d(x,y) &= \int_Q \mathbb{1}_D \cdot |\tilde{f}|\,d(x,y) \\
&\overset{10.1}{=} \int_X \left(\int_Y \mathbb{1}_D(x,y) \frac{1}{x} |\cos(xy)|\,dy \right) dx \\
& \int_1^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} |\cos(xy)|\,dy \right) dx \\
&\leq \int_1^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\,dy \right) dx \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1 < \infty
\end{aligned}$$

Also ist $|f|$ integrierbar und dann nach 4.9 auch f, also $f \in \mathfrak{L}^1(D)$. Dann:

$$\begin{aligned}
\int_D f\,d(x,y) &= \int_X \left(\int_Y \mathbb{1}_D(x,y) \frac{1}{x}\cos(xy)\,dy \right) dx \\
&\overset{\text{wie oben}}{=} \int_1^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\cos(xy)\,dy \right) dx \\
&= \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \sin(xy) \Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{x}} \right) dx \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \sin(1)\,dx \\
&= \sin(1)
\end{aligned}$$

Vorbemerkung: Sei $x > 0$. Für $b > 0$ gilt

$$\int_0^b e^{-xy}\,dy = -\frac{1}{x}e^{-xy}\Big|_0^b = -\frac{1}{x}e^{-xb} + \frac{1}{x} \overset{b\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}$$

und daraus folgt $\int_0^\infty e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x}$

Beispiel

(4) Sei

$$g := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{, falls } x > 0 \\ 1 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$$

g ist stetig auf $[0,\infty)$. Aus Analysis 1 ist bekannt, dass $\int_0^\infty g(x)\,dx$ konvergent, aber **nicht** absolut konvergent ist. Aus 4.14 folgt, dass $g \notin \mathfrak{L}^1([0,\infty))$

Behauptung: $\int_0^\infty g(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

Beweis: Setze $X := [0,R]$ mit $R > 0$, $Y := [0,\infty)$ und $D := X \times Y$, sowie

$$f(x,y) := e^{-xy}\sin x \text{ für } (x,y) \in D$$

Es ist $D \in \mathfrak{B}_2$ und f stetig, also messbar. Es ist weiter $f \in \mathfrak{L}^1(D)$ (warum?) und

$$\begin{aligned}\int_D f(x,y)\,d(x,y) &\overset{10.3}{=} \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)dx \\ &= \int_0^R \left(\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dy\right)dx \\ &= \int_0^R \sin x \left(\int_0^\infty e^{-xy}\,dy\right)dx \\ &\overset{\text{Vorbemerkung}}{=} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx =: I_R\end{aligned}$$

Dann gilt

$$I_R \overset{10.3}{=} \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^\infty \underbrace{\left(\int_0^R e^{-xy}\sin x\,dx\right)}_{=:\varphi(y)}dy$$

Zweimalige partielle Integration liefert (nachrechnen!):

$$\varphi(y) = \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2}e^{-yR}(y\sin R + \cos R)$$

Damit gilt

$$I_R = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}e^{-yR}(y\sin R + \cos R)\,dy$$

Aus Analysis 1 ist bekannt, dass das erste Integral gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert und das zweite Integral setzen wir gleich $\tilde{I}_R$.

Es gilt

$$\begin{aligned}|\tilde{I}_R| &\le \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}e^{-yR}(y|\sin R| + |\cos R|)\,dy \\ &\le \int_0^\infty \frac{y+1}{y^2+1}e^{-yR}\,dy \\ &\le 2\int_0^\infty e^{-yR}\,dy \\ &\overset{\text{Vorbemerkung}}{=} \frac{2}{R}\end{aligned}$$

Das heißt also $\tilde{I}_R \to 0$ $(R \to \infty)$ und damit folgt die Behauptung durch

$$I_R = \frac{\pi}{2} - \tilde{I}_R \to \frac{\pi}{2} \ (R \to \infty)$$

§ 11 Der Transformationssatz (Substitutionsregel)

Die Sätze in diesem Paragraphen geben wir **ohne** Beweis an. Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ nichtleer und offen.

Definition
Sei $\Phi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Φ heißt **Diffeomorphismus** genau dann wenn $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R}^d)$, Φ ist bijektiv und $\Phi^{-1} \in C^1(Y, \mathbb{R}^d)$.
Es gilt

$$x = \Phi^{-1}(\Phi(x)) \text{ für jedes } x \in X$$

Kettenregel:

$$I = \left(\Phi^{-1}\right)'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) \text{ für jedes } x \in X$$

Das heißt $\Phi'(x)$ ist invertierbar für alle $x \in X$ und somit ist $\det(\Phi'(x)) \neq 0$ für alle $x \in X$.

Satz 11.1 (Transformationssatz (Version I))
$\Phi\colon X \to Y$ sei ein Diffeomorphismus.

(1) $f\colon Y \to [0, +\infty]$ sei messbar und für $x \in X$ sei $g(x) := f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|$.
Dann ist g messbar und es gilt:

$$\int_Y f(y)\,dy = \int_X g(x)\,dx = \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx \tag{$*$}$$

(2) $f\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sei integrierbar und g sei definiert wie in (1). Dann ist g integrierbar und es gilt die Formel $(*)$.

Erinnerung: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ und $A^\circ := \{x \in A : \text{ es existiert ein } r = r(x) > 0 \text{ mit } U_r(x) \subseteq A\}$ das **Innere** von A. A° ist offen!

Beispiel
Sei $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es ist $A^\circ = \emptyset$ und $A \setminus A^\circ = A$. Aus $\mathbb{R} = A \dot\cup \mathbb{Q}$ folgt

$$\infty = \lambda_1(\mathbb{R}) = \lambda_1(A) + \lambda_1(\mathbb{Q}) = \lambda_1(A)$$

Das heißt $A \setminus A^\circ$ ist keine Nullmenge.

Satz 11.2 (Transformationssatz (Version II))
Es sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$, $A \subseteq U$, $A \in \mathfrak{B}_d$, $X := A^\circ$ und $A \setminus A^\circ$ eine Nullmenge. Weiter sei Φ injektiv auf X, $\det \Phi' \neq 0$ für alle $x \in X$, $B := \Phi(A) \in \mathfrak{B}_d$ und $g(x) = f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|$ für $x \in A$. Dann gilt:

(1) $Y := \Phi(X)$ ist offen und $\Phi : X \to Y$ ist ein Diffeomorphismus.

(2) Ist $f \colon B \to [0, \infty]$ messbar, so ist $g \colon A \to [0, \infty]$ messbar und

$$\int_B f(y)\, dy = \int_A g(x)\, dx = \int_A f(\Phi(x)) \cdot |\det(\Phi'(x))|\, dx \qquad (**)$$

(3) Ist $f \colon B \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so gilt:

$$f \in \mathfrak{L}^1(B) \iff g \in \mathfrak{L}^1(A)$$

Ist $f \in \mathfrak{L}^1(B)$ so gilt $(**)$

Folgerungen 11.3

(1) Sei $T \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear und $\det T \neq 0$. Weiter sei $A \in \mathfrak{B}_d$ und $v \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $T(A) \in \mathfrak{B}_d$ und es gilt:

$$\lambda_d(T(A) + v) = |\det T| \cdot \lambda_d(A)$$

(2) $\Phi \colon X \to Y$ sei ein Diffeomorphismus und $A \in \mathfrak{B}(X)$. Dann ist $\Phi(A) \in \mathfrak{B}_d$ und es gilt:

$$\lambda_d(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(X)|\, dx$$

(3) Sei $F \in C^1(X, \mathbb{R}^d)$ und $N \subseteq X$ eine Nullmenge. Dann ist $F(N)$ enthalten in einer Nullmenge.

Beispiel
Seien $a, b > 0$ und $T := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\det T = ab > 0$. Definiere:

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Dann ist $A \in \mathfrak{B}_2$ und $\lambda_2(A) = \pi$.

$$\begin{aligned}
(u, v) \in T(A) &\iff \exists (x, y) \in A : (u, v) = (ax, by) \\
&\iff \exists (x, y) \in A : (x = \frac{u}{a}) \wedge (y = \frac{v}{b}) \\
&\iff \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \leq 1
\end{aligned}$$

Aus 11.3 folgt $T(A) \in \mathfrak{B}_2$ und $\lambda(T(A)) = ab\pi$.

11.4. Polarkoordinaten

Jeder Vektor im $\mathbb{R}^2$ lässt sich nicht nur durch seine Projektionen auf die Koordinatenachsen (x, y), sondern auch eindeutig durch seine Länge r und den (kleinsten positiven) Winkel φ zur x-Achse darstellen. Diese Darstellung (r, φ) heißen die **Polarkoordinaten** des Vektors. Dabei gilt:

$$r = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$$

Definiere nun für $(r, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$:

$$\Phi(r, \varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

Dann ist $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und es gilt:

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

d.h. falls $r > 0$ ist gilt:

$$\det \Phi'(r, \varphi) = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r > 0$$

Bemerkung (Faustregel für Polarkoordinaten): Ist ein Integral der Form $\int_B f(x, y) d(x, y)$ zu berechnen, so lässt sich oft eine Menge A finden, sodass $\Phi(A) = B$ ist. Mit 11.2 folgt dann:

$$\int_B f(x, y) \ \mathrm{d}(x, y) = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \ \mathrm{d}(r, \varphi)$$

Beispiel

(1) Sei $0 \leq \rho < R$. Definiere

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_2(B) &= \int_B 1 \ \mathrm{d}(x, y) \\ &= \int_A 1 \cdot r \ \mathrm{d}(r, \varphi) \\ &\overset{§10}{=} \int_\rho^R \left(\int_0^{2\pi} r \ \mathrm{d}\varphi \right) \ \mathrm{d}r \\ &= \left[2\pi \frac{1}{2} r^2 \right]_\rho^R \\ &= \pi(R^2 - \rho^2) \end{aligned}$$

(2) Definiere

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_B y\sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}(x,y) &= \int_A r\sin(\varphi) r\cdot r\ \mathrm{d}(r,\varphi) \\
&= \int_A r^3 \sin\varphi\ \mathrm{d}(r,\varphi) \\
&\overset{\S 10}{=} \int_0^\pi \left(\int_0^1 r^3\sin\varphi\ \mathrm{d}r\right)\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \left[\frac{1}{4}(-\cos\varphi)\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(3) **Behauptung:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Beweis: Für $\rho > 0$ sei

$$B_\rho := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\geq 0, x^2+y^2\leq \rho^2\}$$

Weiterhin sei $Q_\rho := [0,\rho]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ und $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho} f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) &= \int_{Q_\rho} e^{-r^2} r\ \mathrm{d}(r,\varphi) \\
&\overset{\S 10}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\rho re^{-r^2}\ \mathrm{d}r\right)\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\rho \\
&= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}+\frac{1}{2}\right) \\
&=: h(\rho) \overset{\rho\to\infty}{\to} \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{Q_\rho} f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) &= \int_{Q_\rho} e^{-x^2}e^{-y^2}\ \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^\rho\left(\int_0^\rho e^{-x^2}e^{-y^2}\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \left(\int_0^\rho e^{-x^2}\ \mathrm{d}x\right)^2
\end{aligned}$$

Wegen $B_\rho \subseteq Q_\rho \subseteq B_{\sqrt{2}\rho}$ und $f\geq 0$ folgt:

$$\begin{array}{lccccc}
 & \int_{B_\rho} f\ \mathrm{d}(x,y) & \leq & \int_{Q_\rho} f\ \mathrm{d}(x,y) & \leq & \int_{B_{\sqrt{2}\rho}} f\ \mathrm{d}(x,y) \\
\Longrightarrow & h(\rho) & \leq & \int_{Q_\rho} f\ \mathrm{d}(x,y) & \leq & h(\sqrt{2}\rho) \\
\Longrightarrow & h(\rho) & \leq & \left(\int_0^\rho e^{-x^2}\ \mathrm{d}x\right)^2 & \leq & h(\sqrt{2}\rho) \\
\Longrightarrow & \sqrt{h(\rho)} & \leq & \int_0^\rho e^{-x^2}\ \mathrm{d}x & \leq & \sqrt{h(\sqrt{2}\rho)}
\end{array}$$

Mit $\rho \to \infty$ folgt daraus
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
und damit die Behauptung.

11.5. Zylinderkoordinaten

Definiere für $(r, \varphi, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$:
$$\Phi(r, \varphi, z) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$$
Dann gilt:
$$|\det \Phi'(r, \varphi, z)| = \left|\det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = r$$

Bemerkung (Faustregel für Zylinderkoordinaten): Ist ein Integral der Form $\int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$ zu berechnen, so lässt sich eine Menge A finden, sodass $\Phi(A) = B$ ist. Mit 11.2 folgt dann:
$$\int_B f(x, y, z)\ \mathrm{d}(x, y, z) = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \cdot r\ \mathrm{d}(r, \varphi, z)$$

Beispiel
Definiere
$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0, z \in [0, 1]\}$$
Dann gilt:
$$\begin{aligned}
\int_B z + y\sqrt{x^2 + y^2}\ \mathrm{d}(x, y, z) &= \int_A (z + r\sin(\varphi) \cdot r) \cdot r\ \mathrm{d}(r, \varphi, z) \\
&= \int_A rz + r^3\sin(\varphi)\ \mathrm{d}(r, \varphi, z) \\
&= \int_0^1 (\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^1 rz + r^3\sin(\varphi)\ \mathrm{d}r)\ \mathrm{d}\varphi)\ \mathrm{d}z \\
&= (\int_0^1 r\ \mathrm{d}r) \cdot (\int_0^1 z\ \mathrm{d}z) \cdot (\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}\varphi) + (\int_0^1 r^3\ \mathrm{d}r) \cdot (\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi) \cdot (\int_0^1\ \mathrm{d}z) \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

11.6. Kugelkoordinaten

Definiere für $(r, \varphi, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$:
$$\Phi(r, \varphi, \theta) := (r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))$$
Dann gilt (nachrechnen!):
$$\det \Phi'(r, \varphi, \theta) = -r^2\sin(\theta)$$

Bemerkung (Faustregel für Kugelkoordinaten): Ist ein Integral der Form $\int_B f(x,y,z)d(x,y,z)$ zu berechnen, so lässt sich eine Menge A finden, sodass $\Phi(A) = B$ ist. Mit 11.2 folgt dann:

$$\int_B f(x,y,z)\ \mathrm{d}(x,y,z) = \int_A f(r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta)\ \mathrm{d}(r,\varphi,\theta)$$

Beispiel
Definiere

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq \|(x,y,z)\| \leq 2, x,y,z \geq 0\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_B \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\ \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_A \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot \sin(\theta)\ \mathrm{d}(r,\varphi,\theta) \\
&= \int_A \sin(\theta)\ \mathrm{d}(r,\varphi,\theta) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Beispiel (Zugabe von Herrn Dr. Ullmann)
Wir wollen das Kugelvolumen $\lambda_3(K)$ mit $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\| \leq 1\}$ berechnen. Dann ist $K = \Phi(A)$ mit $A := [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$. Und es gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda_3(K) &= \int_K 1\ \mathrm{d}(x,y,z) \\
&= \int_A r^2 \sin(\theta)\ \mathrm{d}(r,\varphi,\theta) \\
&= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi} r^2 \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta)\ \mathrm{d}\varphi)\ \mathrm{d}r \\
&= (\int_0^1 r^2\ \mathrm{d}r) \cdot (\int_0^{2\pi}\ \mathrm{d}\varphi) \cdot (\int_0^{\pi} \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta) \\
&= \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

§ 12 Vorbereitungen für die Integralsätze

Definition
Seien $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt

$$a \times b := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

das **Kreuzprodukt** von a mit b. Mit $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ gilt formal:

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel
Sei $a = (1, 1, 2), b = (1, 1, 0)$, dann gilt:

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 1 \\ e_2 & 1 & 1 \\ e_3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2e_1 - (-2)e_2 + (1 - 1)e_3 = (-2, 2, 0)$$

Regeln zum Kreuzprodukt:

(1) $b \times a = -a \times b$

(2) $a \times a = 0$

(3) $(\alpha a) \times (\beta b) = \alpha\beta(a \times b)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(4) $a \cdot (a \times b) = b \cdot (a \times b) = 0$

Definition
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen und $f = (f_1, \ldots, f_n) \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. Dann heißt

$$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \in C(D, \mathbb{R})$$

die **Divergenz** von f.

Definition
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^3$, D offen und $F = (P, Q, R) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$. Dann heißt:

$$\operatorname{rot} F := (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \in C(D, \mathbb{R}^3)$$

die **Rotation** von F. Dabei gilt formal:

$$\operatorname{rot} F = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times (P, Q, R)$$

Definition
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Ist γ in $t_0 \in [a, b]$ differenzierbar mit $\gamma'(t_0) \neq 0$, so heißt $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ **Tangentialvektor** von γ in t_0.

§ 13 Der Integralsatz von Gauß im $\mathbb{R}^2$

In diesem Paragraphen sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (fest), es sei $R : [0, 2\pi] \to [0, \infty)$ stetig und stückweise stetig differenzierbar und $R(0) = R(2\pi)$. Weiter sei

$$\gamma(t) := (x_0 + R(t)\cos t, y_0 + R(t)\sin t) \ (t \in [0, 2\pi])$$

Dann ist γ ein stückweise stetig differenzierbarer, geschlossener und rektifizierbarer Weg in $\mathbb{R}^2$. Es sei

$$B := \{(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) : t \in [0, 2\pi], 0 \le r \le R(t)\}$$

Dann ist B kompakt, also $B \in \mathfrak{B}_2$. Weiter ist $\partial B = \gamma([0, 2\pi]) = \Gamma_\gamma$.
Sind B und γ wie oben, so heißt B **zulässig**.

Beispiel
Sei R konstant, also $R(t) = R > 0$, so ist $B = \overline{U_R(x_0, y_0)}$

Satz 13.1 (Integralsatz von Gauß im $\mathbb{R}^2$)
B und γ seien wie oben (B also zulässig). Weiter sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B \subseteq D$ und $f = (u, v) \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Dann

(1) $\int_B u_x(x, y) d(x, y) = \int_\gamma u(x, y) d(y)$

(2) $\int_B v_y(x, y) d(x, y) = -\int_\gamma v(x, y) d(x)$

(3) $\int_B \operatorname{div} f(x, y) d(x, y) = \int_\gamma (u dy - v dx)$

Folgerung 13.2
Mit $f(x, y) := (x, y)$ erhält man aus 13.1: Sind B und γ wie in 13.1, so gilt:

(1) $\lambda_2(B) = \int_\gamma x dy$

(2) $\lambda_2(B) = -\int_\gamma y dx$

(3) $\lambda_2(B) = \frac{1}{2}\int_\gamma (x dy - y dx)$

Beispiel
Definiere

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\} \quad (R > 0)$$

und $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$, für $t \in [0, 2\pi]$, dann gilt:

$$\lambda_2(B) = \int_0^{2\pi} R\cos t \cdot R\cos t \ \mathrm{d}t = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \ \mathrm{d}t = \pi R^2$$

Beweis
Wir beweisen nur (1). ((2) beweist man analog und (3) folgt aus (1) und (2))
O.B.d.A: $(x_0, y_0) = (0,0)$ und R stetig db. Also $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma(t) = (\underbrace{R(t)\cos t}_{=\gamma_1(t)}, \underbrace{R(t)\sin t}_{=\gamma_2(t)})$. R stetig differenzierbar. $A := \int_B u_x(x,y)d(x,y)$
Zu zeigen: $A = \int_0^{2\pi} u(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)dt$.
Mit Polarkoordinaten, Transformations-Satz und Fubini:

$$A = \int_0^{2\pi} (\int_0^{R(t)} u_x(r\cos t, r\sin t) r dr)dt$$

(1) $\beta(r,t) := u(r\cos t, r\sin t)$. Nachrechnen: $r\beta_r(r,t)\cos t - \beta_t(r,t)\sin t = u_x(r\cos t, r\sin t)r$.
Also:

$$A = \int_0^{2\pi} (\int_0^{R(t)} (r\beta_r(r,t)\cos t - \beta_t(r,t)\sin t)dr)dt$$

(2) $\int_0^{R(t)} r\beta_r(r,t)dr = r\beta(r,t)|_{r=0}^{r=R(t)} - \underbrace{\int_0^{R(t)} \beta(r,t)dr}_{=:\alpha(t)} = R(t)\beta(R(t),t) - \alpha(t) = R(t)u(\gamma(t)) - \alpha(t)$

(3) $\Psi(s,t) := \int_0^s \beta(r,t)dr$. Mit dem zweiten Hauptsatz aus Analysis 1 folgt: $\Psi_s(s,t) = \beta(s,t)$
7.3 $\implies \Psi_t(s,t) = \int_0^s \beta_t(r,t)dr$.
Dann: $\alpha(t) = \Psi(R(t),t)$, also

$$\alpha'(t) = \Psi_s(R(t),t) \cdot R'(t) + \Psi_t(R(t),t) \cdot 1 = R'(t)\underbrace{\beta(R(t),t)}_{=u(\gamma(t))} + \int_0^{R(t)} \beta_t(r,t)dr$$

$\implies \int_0^{R(t)} \beta_t(r,t)dr = \alpha'(t) - R'(t) \cdot u(\gamma(t))$.

(4) Aus (1),(2),(3) folgt:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} (R(t) \cdot u(\gamma(t)) \cdot \cos t - \alpha(t)\cos t - \alpha'(t)\sin t + R'(t) \cdot u(\gamma(t))\sin t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} u(\gamma(t))\gamma_2'(t)dt - \int_0^{2\pi} (\alpha(t)\sin t)'dt \\ &= \int_0^{2\pi} u(\gamma(t))\gamma_2'(t)dt - \underbrace{[\alpha(t)\sin t]_0^{2\pi}}_{=0} \\ &= \int_0^{2\pi} u(\gamma(t))\gamma_2'(t)dt \end{aligned}$$

■

§ 14 Flächen im $\mathbb{R}^3$

Definition
Es sei $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $B \subseteq D$. Weiter sei $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ und $\varphi = \varphi(u, v)$. Dann heißt $\varphi_{|B}$ eine **Fläche** (im $\mathbb{R}^3$), $S := \varphi(B)$ heißt **Flächenstück** und B heißt **Parameterbereich** der Fläche. Es ist

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Sei $(u_0, v_0) \in B$ und

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= \varphi(t, v_0) & \gamma'(t) &= \varphi_u(t, v_0) & \gamma'(u_0) &= \varphi_u(u_0, v_0) \\ \tilde{\gamma}(t) &:= \varphi(u_0, t) & \tilde{\gamma}'(t) &= \varphi_v(u_0, v) & \tilde{\gamma}'(v_0) &= \varphi_v(u_0, v_0) \end{aligned}$$

Definere damit den **Normalenvektor** in $\varphi(u_0, v_0)$:

$$N(u_0, v_0) := \varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0)$$

Seien $\Delta u, \Delta v > 0$ (aber „klein"). $a := \Delta u \varphi_u(u_0, v_0)$, $b := \Delta v \varphi_v(u_0, v_0)$.

$$P := \{\lambda a + \mu b : \ \lambda, \mu \in [0, 1]\}$$

Aus der Linearen Algebra folgt, der „Inhalt" von P ist $\|a \times b\| = \Delta u \Delta v \|N(u_0, v_0)\|$.

$$I(\varphi) = \int_B \|N(u, v)\| d(u, v)$$

heißt deshalb **Flächeninhalt** von φ

Beispiel
$B := [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $D = \mathbb{R}^2$
$\varphi(u, v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$. Dann: $\varphi(B) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
Nachrechnen: $N(u, v) = \cos v \varphi(u, v)$. Dann: $\|N(u, v)\| = |\cos v| \underbrace{\|\varphi(u, v)\|}_{=1} = \cos v \quad ((u, v) \in B)$.

Damit gilt:

$$I(\varphi) = \int_B \cos v d(u, v) = \int_0^{2\pi} (\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v d(v)) d(u) = 4\pi$$

14.1. Explizite Parameterdarstellung

Seien B und D wie in obiger Definition und $f \in C^1(D, \mathbb{R})$. Setze

$$\varphi(u, v) := (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

Damit ist $\varphi_{|B}$ eine Fläche (in expliziter Darstellung). Dann ist $S = \varphi(B)$ gleich dem Graph von $f_{|B}$.

$$\varphi_u = (1, 0, f_u), \quad \varphi_v = (0, 1, f_v), \quad N(u, v) = (-f_u, -f_v, 1) \quad \text{(Nachrechnen!)}$$

Damit gilt:

$$I(\varphi) = \int_B (f_u^2 + f_v^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}(u, v)$$

Beispiel
Sei $D = \mathbb{R}^2$, $B := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$ und

$$f(u, v) := u^2 + v^2$$

Dann ist $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $f_u = 2u$ und $f_v = 2v$. Also ist $S = \varphi(B)$ ein Paraboloid.

$$I(\varphi) = \int_B (4u^2 + 4v^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}(u, v) \overset{\text{PK}}{=} \frac{\pi}{6} \left(\sqrt{5}^3 - 1 \right) \quad \text{(Nachrechnen!)}$$

§ 15 Integralsatz von Stokes

In diesem Paragraphen sei $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^2$, B kompakt, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B \subseteq D$ und $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$. Das heißt: $\varphi_{|B}$ ist eine Fläche mit Parameterbereich B, $S := \varphi(B)$

Definition
Definiere die folgenden **Oberflächenintegrale**:

(1) Sei $f : S \to \mathbb{R}$ stetig. Dann:

$$\int_\varphi f \mathrm{d}\sigma := \int_B f(\varphi(u,v)) \|N(u,v)\| \mathrm{d}(u,v)$$

(2) Sei $F : S \to \mathbb{R}^3$ stetig. Dann:

$$\int_\varphi F \cdot n \mathrm{d}\sigma := \int_B F(\varphi(u,v)) \cdot N(u,v) \mathrm{d}(u,v)$$

Beispiel
Seien D, B, f, φ wie im letzten Beispiel in Kapitel 14.

Sei $F(x,y,z) := (x,y,z)$; bekannt: $N(u,v) = (-2u, -2v, 1)$. Dann:

$$\begin{aligned} F(\varphi(u,v)) \cdot N(u,v) &= F(u, v, u^2+v^2) \cdot (-2u, -2v, 1) \\ &= (u, v, u^2+v^2) \cdot (-2u, -2v, 1) \\ &= -(u^2+v^2) \end{aligned}$$

Also:

$$\int_\varphi F \cdot n \mathrm{d}\sigma = -\int_B (u^2+v^2) \mathrm{d}(u,v) = -\frac{\pi}{2}$$

Satz 15.1 (Integralsatz von Stokes)
Es sei B zulässig, $\partial B = \Gamma_\gamma$, wobei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ wie zu Beginn des Paragraphen 13 ist. Es sei $\varphi \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$. Weiter sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $S \subseteq G$ und $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$. Dann:

$$\underbrace{\int_\varphi \operatorname{rot} F \cdot n \mathrm{d}\sigma}_{\text{Oberflächenint.}} = \underbrace{\int_{\varphi \circ \gamma} F(x,y,z) \cdot \mathrm{d}(x,y,z)}_{\text{Wegint.}}$$

Beispiel
D, B, f, F und φ seien wie in obigem Beispiel. Hier: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$. Dann: $(\varphi \circ \gamma)(t) = \varphi(\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t, 1) \quad (t \in [0, 2\pi])$.

Es ist $\operatorname{rot} F = 0$, also: $\int_\varphi \operatorname{rot} F \cdot n \mathrm{d}\sigma = 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi\circ\gamma} F(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^{2\pi} F((\varphi\circ\gamma)(t)) \cdot (\varphi\circ\gamma)'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos t, \sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)}_{=0} \mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

Beweis
Sei $\varphi := \varphi \circ \gamma$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, also $\varphi_j = \varphi_j \circ \gamma \quad (j = 1,2,3)$.

Zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\int_\varphi \operatorname{rot} F \cdot n \mathrm{d}\sigma &= \int_\varphi F(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) \\
&= \int_0^{2\pi} F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^3 F_j(\varphi(t))\varphi_j'(t) \right) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^3 \int_0^{2\pi} F_j(\varphi(t))\varphi_j'(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Es ist $\int_\varphi \operatorname{rot} F \cdot n \mathrm{d}\sigma = \int_B \underbrace{(\operatorname{rot} F)(\varphi(x,y)) \cdot (\varphi_x(x,y) \times \varphi_y(x,y))}_{=:g(x,y)} \mathrm{d}(x,y)$. Für $j = 1,2,3$:

$$h_j(x,y) := \left(\underbrace{F_j(\varphi(x,y)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(x,y)}_{=:u_j(x,y)}, \underbrace{-F_j(\varphi(x,y)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x,y)}_{=:v_j(x,y)} \right) \qquad ((x,y) \in D)$$

$h_j = (u_j, v_j); \quad F \in C^1$, $\varphi \in C^2$, damit folgt: $h_j \in C^1$

Nachrechnen: $g = \operatorname{div} h_1 + \operatorname{div} h_2 + \operatorname{div} h_3$

Damit:

$$\begin{aligned}
\int_B \operatorname{rot} F \cdot n \mathrm{d}\sigma &= \sum_{j=1}^3 \int_B \operatorname{div} h_j(x,y)\mathrm{d}(x,y) \\
&= \sum_{j=1}^3 \int_\gamma (u_j \mathrm{d}y - v_j \mathrm{d}x) \\
&= \int_0^{2\pi} F_j(\varphi(t))\varphi_j'(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

■

§ 16 $\mathfrak{L}^p$-Räume und L^p-Räume

Stets in diesem Paragraphen: $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$

Definition
Sei $p \in [1, +\infty]$.

$$p' := \begin{cases} \infty & , p = 1 \\ 1 & , p = \infty \\ \frac{p}{p-1} & , 1 < p < \infty \end{cases}$$

Dann gilt: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $p = p' \Leftrightarrow p = 2$.

Hilfssatz
Seien $x, y \geq 0$, $p \in (1, \infty)$, dann gilt: $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}$

Beweis
Für $t > 0:\ f(t) := \frac{t}{p} + \frac{1}{p'} - t^{\frac{1}{p}}$

Übung: $\min\{f(t) \mid t > 0\} = f(1) = 0$

D.h.: $t^{\frac{1}{p}} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{p'} \quad \forall t > 0$

Seien $u, v > 0$, $t := \frac{u}{v}$. Dann: $\frac{u^{\frac{1}{p}}}{v^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{u}{vp} + \frac{1}{p'}$. Daraus folgt $u^{\frac{1}{p}} v^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{p'} \implies u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{p'}$

Seien $x, y > 0:\ u := x^p$, $v := y^{p'}$. Dann: $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}$.

Im Falle $x = 0$ oder $y = \infty$ ist die Ungleichung trivialerweise richtig. ■

Erinnerung: Sei $f:\ X \to \mathbb{R}$ messbar und $p > 0$, so ist $|f|^p$ messbar (vgl. Kapitel 3).

Es gilt: $|f|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \Leftrightarrow \int_X |f|^p \mathrm{d}x < \infty$

Definition
(1) Sei $p \in [1, \infty)$. $\mathfrak{L}^p(X) = \{f:\ X \to \mathbb{R} \mid f$ ist messbar und $\int_X |f|^p \mathrm{d}x < \infty\}$.

Für $f \in \mathfrak{L}^p(X)$: $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$

(2) $\mathfrak{L}^\infty(X) = \{f:\ X \to \mathbb{R} \mid f$ ist messbar und f ist f.ü. beschränkt$\}$

Für $f \in \mathfrak{L}^\infty(X)$: $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} \|f(x)\| = \inf\{c > 0 \mid \exists$Nullmenge $N_c \subseteq X : |f(x)| \leq c\, \forall x \in X \setminus N_c\}$

Bemerkung: Es sei $f \in \mathfrak{L}^\infty(X)$ und stetig. Außerdem habe jede in X offene, nichtleere Teilmenge positives Maß. Dann ist f auf X beschränkt und $\sup_{x \in X} |f(x)| = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$.

Beweis
Übung (ist $N \subseteq X$ eine Nullmenge, so ist $N^\circ = \emptyset$ und $\overline{X \setminus N} = X$) ■

Beispiel
Sei $d = 1$, $X = [1, \infty)$, $p > 1\,(p < \infty)$, $\alpha, \beta > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $g(x) = \frac{1}{x^\beta}$

(1)

$$f \in \mathfrak{L}^p(X) \overset{4.14}{\iff} \int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha p}} \mathrm{d}x$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha p > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p}$

(2)

$$fg \in \mathfrak{L}^1(X) \overset{4.14}{\iff} \int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha+\beta}} \mathrm{d}x$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha + \beta > 1$

Satz 16.1
Sei $p \in [1, \infty]$ und p' wie zu Anfang dieses Kapitels, also $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(1) Sei $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und $g \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$. Dann ist $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$ und es gilt die **Höldersche Ungleichung**:
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

Ist $p = 2\,(\implies p' = 2)$, so heißt obige Ungleichung auch **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**.

(2) $\mathfrak{L}^p(X)$ ist ein reeller Vektorraum und für $f, g \in \mathfrak{L}^p(X)$ gilt die **Minkowskische Ungleichung**:
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis
(1) Unterscheide die folgenden Fälle:

Fall 1: $p = 1$ (also $p' = \infty$) oder $p = \infty$ (also $p' = 1$). Etwa $p = 1$, $p' = \infty$.

Sei $c > 0$ und $N_c \subseteq X$ Nullmenge mit: $|g(x)| \leq c\,\forall x \in X \setminus N_c$. $\tilde{g} := \mathbb{1}_{X \setminus N_c} \cdot g$

Dann: $g = \tilde{g}$ fast überall und $|\tilde{g}| \leq c$ auf X. Weiter: $fg = f\tilde{g}$ fast überall, bzw. $|fg| = |f\tilde{g}|$ fast überall.

Dann:
$$\int_X |fg| \mathrm{d}x = \int_X |f\tilde{g}| \mathrm{d}x = \int_X |f| \underbrace{|\tilde{g}|}_{\leq c} \mathrm{d}x \leq \int_X |f| \mathrm{d}x = c \cdot \|f\|_1 < \infty$$

Also: $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$ und $\|fg\|_1 \leq c\|f\|_1$. Übergang zum Infimum über alle $c > 0$ liefert: $\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$

Fall 2: Sei $1 < p < \infty$. Ist $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_{p'} = 0$, so ist $f = 0$ fast überall oder $g = 0$ fast überall. Daraus folgt: $|fg| = 0$ fast überall. Mit 5.2 folgt: $\int_X |fg| \mathrm{d}x = 0$. Daraus folgen die Behauptungen.

Sei $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_{p'} > 0$.

Aus obigem Hilfssatz:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}} \quad \forall x \in X$$

Integration liefert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}} \int_X |f(x)g(x)| \mathrm{d}x &\leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_X |f|^p \mathrm{d}x + \frac{1}{p'} \cdot \frac{1}{\|g\|_{p'}^{p'}} \int_X |g|^{p'} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \\ &= 1 < \infty \end{aligned}$$

Daraus folgt: $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$ und

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_p} \leq 1 \Leftrightarrow \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_p$$

(2) Klar: Ist $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha f \in \mathfrak{L}^p(X)$

Fall 1: $p = 1$: Mit 4.11 folgt: $\mathfrak{L}^1(X)$ ist ein reeller Vektorraum.

Seien $f, g \in \mathfrak{L}^1(X)$. Dann: $|f+g| \leq |f| + |g|$ auf X. Damit:

$$\int_X |f+g| \mathrm{d}x \leq \int_X |f| \mathrm{d}x + \int_X |g| \mathrm{d}x$$

Fall 2: $p = \infty$: Seien $f,\, g \in \mathfrak{L}^\infty(X)$. Seien $c_1,\, c_2 > 0$ und $N_1,\, N_2 \subseteq X$ Nullmengen und $|f(x)| \leq c_1 \forall x \in X \setminus N_1$, $|g(x)| \leq c_2 \forall x \in X \setminus N_2$.

$N = N_1 \cup N_2$ ist eine Nullmenge. Dann: $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq c_1 + c_2 \forall x \in X \setminus N$. Es folgt: $f + g \in \mathfrak{L}^\infty(X)$ und $\|f+g\|_\infty \leq c_1 + c_2$.

Übergang zum Infimum über alle solche c_1, bzw. c_2, liefert: $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Fall 3: Sei $1 < p < \infty$ und $f,\, g \in \mathfrak{L}^p(X)$. Es ist $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq (2\max\{|f|,\, |g|\})^p \leq 2^p \left(|f|^p + |g|^p\right)$ auf X. Mit 4.9 folgt: $|f+g|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \implies f + g \in \mathfrak{L}^p(X)$

$p' = \frac{p}{p-1}$; $h := |f+g|^{p-1}$, dann: $h^{p'} = \left(|f+g|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} = |f+g|^p \in \mathfrak{L}^1(X)$. Dann ist $h \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$. Also: $h \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$, $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ (und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

Mit der Hölderschen Ungleichung folgt: $\|f \cdot f_1\| \leq \|f\|_p \|h\|_{p'} \implies \int_X h|f| \mathrm{d}x \leq \|f\|_p \left(\int_X h^{p'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}$. Dann:

$$\begin{aligned} \int_X |f||f+g|^{p-1} \mathrm{d}x &\leq \|f\|_p \left(\int_X \left(|f+g|^{p-1}\right)^{p'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \|f\|_p \left(\|f+g\|_p^p\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

Genauso: $\int_X |g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}x \leq \|g\|_p \|f+g\|_p^{p+1}$

Dann:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_X |f+g|^p \mathrm{d}x \\
&= \int_X |f+g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}x \\
&= \int_X |f||f+g|^{p-1}\mathrm{d}x + \int_X |g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}x \\
&\leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|f+g\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

■

Teilen durch $\|f+g\|_p^{p-1}$ liefert die Minkowski-Ungleichung.

Satz 16.2
Sei $\lambda_d(X) < \infty$, $p, q \geq 1$ und $p \leq q \leq \infty$. Dann ist $\mathfrak{L}^q(X) \subseteq \mathfrak{L}^p(X)$ und es gilt:

$$\forall f \in \mathfrak{L}^q(X) : \|f\|_p \leq \lambda_d(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$$

Beweis
Sei $f \in \mathfrak{L}^q(X)$.
Fall $p = q$: Klar.
Fall $q = \infty$: Leichte Übung!
Fall $p < q < \infty$:
Sei $r := \frac{q}{p} > 1$, dann ist $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{p}{q}$. Aus $|f|^{pr} = |f|^q \in \mathfrak{L}^1(X)$ folgt $|f|^p \in \mathfrak{L}^r(X)$. Definiere $g := \mathbb{1}_X$, dann ist $g \in \mathfrak{L}^{r'}(X)$, da $\lambda_d(X) < \infty$. Wegen 16.1 gilt dann:

$$g \cdot |f|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \implies |f|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \implies f \in \mathfrak{L}^p(X)$$

Aus der Hölderschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \|g \cdot |f|^p\|_1 \\
&\leq \|g\|_{r'} \cdot \||f|^p\|_r \\
&= \left(\int_X g^{r'}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r'}} \cdot \left(\int_X |f|^{pr}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \lambda_d(X)^{\frac{1}{r'}} \cdot \left(\int_X |f|^q\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= \lambda_d(X)^{1-\frac{p}{q}} \cdot \|f\|_q^p
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\|f\|_p \leq \lambda_d(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$$

■

Beispiel

(1) Sei $X := (0,1]$, $1 \leq p < q < \infty$ (also $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$) und $f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$). Dann gilt nach 4.14 und Analysis I:

$$\begin{aligned} f \in \mathfrak{L}^p(X) &\iff \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha p}}\, \mathrm{d}x \text{ konvergiert} \\ &\iff \alpha p < 1 \\ &\iff \alpha < \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Sei $\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$, dann ist $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und $f \notin \mathfrak{L}^q(X)$. D.h. $\mathfrak{L}^p(X) \not\subseteq \mathfrak{L}^q(X)$ und aus 16.2 folgt $\mathfrak{L}^q(X) \subseteq \mathfrak{L}^p(X)$.

(2) Sei $X := [1,\infty)$, $p = 1$, $q \in (1,\infty)$ und $f(x) := \frac{1}{x}$. Dann gilt nach 4.14 und Analysis I: $f \notin \mathfrak{L}^p(X)$ und $f \in \mathfrak{L}^q(X)$. D.h. also $\mathfrak{L}^q(X) \not\subseteq \mathfrak{L}^p(X)$.
Definiere $g(x) := \mathbb{1}_{[1,2)} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{q}}$. Übung: $g \in \mathfrak{L}^p(X)$ und $g \notin \mathfrak{L}^q(X)$. D.h. also $\mathfrak{L}^p(X) \not\subseteq \mathfrak{L}^q(X)$.

Satz 16.3 (Satz von Lebesgue ($\mathfrak{L}^p$-Version))
Sei $1 \leq p < \infty$, $f : X \to \mathbb{R}$ sei messbar, $g : X \to [0,\infty]$ integrierbar und (f_n) eine Folge in $\mathfrak{L}^p(X)$ mit den Eigenschaften:

(1) $f_n \to f$ f.ü. auf X

(2) $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n|^p \leq g$ f.ü. auf X.

Dann ist $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und es gilt

$$\|f_n - f\|_p \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Beweis
Aus (i) und (ii) folgt: $|f|^p \leq g$ f.ü. Im Paragraphen 5 haben wir gesehen, dass dann gilt:

$$\int_X |f|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_X g \,\mathrm{d}x < \infty$$

(denn g ist nach Voraussetzung integrierbar). Daraus folgt: $f \in \mathfrak{L}^p(X)$.

Setze $g_n := |f_n - f|^p$. Aus (i): $g_n \to 0$ f.ü. Es sind $f_n, f \in \mathfrak{L}^p(X)$ (ersteres nach Voraussetzung, zweiteres haben wir gerade gezeigt), und weil $\mathfrak{L}^p(X)$ ein reeller Vektorraum ist (16.1(2)), folgt:

$$f_n - f \in \mathfrak{L}^p(X)$$

Also $g_n \in \mathfrak{L}^1(X)$. Es ist

$$0 \leq g_n \leq (|f_n| + |f|)^p \leq \left(g^{\frac{1}{p}} + g^{\frac{1}{p}}\right)^p = \left(2g^{\frac{1}{p}}\right)^p = 2^p g \quad \text{f.ü.}$$

Mit 6.2 folgt schließlich:

$$\underbrace{\int_X g_n \,\mathrm{d}x}_{=\|f_n - f\|_p^p} \to 0.$$

■

Aus 16.1 folgt: $\mathfrak{L}^p(X)$ ist ein reeller Vektorraum (VR), wobei für $f, g \in \mathfrak{L}^p(X)$ gilt:

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Aber $\|\cdot\|_p$ ist **keine** Norm auf $\mathfrak{L}^p(X)$! Denn aus $\|f\|_p = 0$ folgt nur $f = 0$ f.ü.

Definition
Es sei $\mathcal{N} := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } f = 0 \text{ f.ü.}\}$, dann ist $\mathcal{N}$ ein Untervektorraum von $\mathfrak{L}^p(X)$. Definiere

$$L^p(X) := \mathfrak{L}^p(X)/\mathcal{N} = \{\hat{f} = f + \mathcal{N} \mid f \in \mathfrak{L}^p(X)\}$$

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass $L^p(X)$ durch die Skalarmultiplikation

$$\alpha \cdot \hat{f} := \widehat{\alpha f}$$

und die Addition

$$\hat{f} + \hat{g} := \widehat{f+g}$$

zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ wird.

Setze für $\hat{f} \in L^1(X)$:

$$\int_X \hat{f}(x)\ \mathrm{d}x := \int_X f(x)\ \mathrm{d}x$$

dabei ist diese Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ von $\hat{f}$, denn: ist auch noch $g \in \mathfrak{L}^1(X)$ und $\hat{g} = \hat{f}$, so ist $f - g \in \mathcal{N}$, also $f - g = 0$ f.ü. und damit: $\int_X f\ \mathrm{d}x = \int_X g\ \mathrm{d}x$.

Für $\hat{f} \in L^p(X)$ definiere

$$\|\hat{f}\|_p := \|f\|_p$$

wobei diese Definition unabhängig ist von der Wahl des Repräsentanten $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ von $\hat{f}$.

Für $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(X)$ setze

$$(\hat{f}|\hat{g}) := \int_X f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$$

(auch diese Definition ist Repräsentanten-unabhängig) (Beachte: $f \cdot g \in \mathfrak{L}^1(X)$)

Dann gilt:

(1) $L^p(X)$ ist unter $\|\cdot\|_p$ ein normierter Raum (NR).

(2) Für $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(X)$ gilt:

$$|(\hat{f}|\hat{g})| = |\int_X f(x)g(x)\ \mathrm{d}x| \leq \int_X |fg|\ \mathrm{d}x = \|fg\|_1 \overset{16.1}{\leq} \|f\|_2\|g\|_2 = \|\hat{f}\|_2\|\hat{g}\|_2$$

(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Nachrechnen: $(\hat{f}|\hat{g})$ definiert ein Skalarprodukt auf $L^2(X)$. Es gilt:

$$(\hat{f}|\hat{f}) = \int_X f(x)^2\ \mathrm{d}x = \|\hat{f}\|_2^2$$

Also: $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{(\hat{f}|\hat{f})}$

Definition
Sei $(B, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Gilt mit einem Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ auf B:

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)} \quad \forall v \in B \tag{$*$}$$

so heißt B ein **Prähilbertraum**. Ist B ein Banachraum mit $(*)$, so heißt B ein **Hilbertraum**.

Vereinbarung: ab jetzt sei stets in diesem Paragraphen $1 \leq p < \infty$.

Bemerkung: Seien $f, f_n \in \mathfrak{L}^p(X)$

(1) $\|f_n - f\|_p = \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p \to 0$ genau dann, wenn $(\hat{f}_n)$ eine konvergente Folge im normierten Raum $L^p(X)$ mit dem Grenzwert $\hat{f}$ ist.

(2) $(\hat{f}_n)$ ist eine **Cauchyfolge** (CF) in $L^p(X)$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ exitiert mit:

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_p = \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \tag{$*$}$$

(3) Wie in Analysis II zeigt man: gilt $\|f_n - f\|_p = \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p \to 0$, so ist $(\hat{f}_n)$ eine Cauchyfolge in $L^p(X)$.

Satz 16.4 (Satz von Riesz-Fischer)
$(\hat{f}_n)$ sei eine Cauchyfolge in $L^p(X)$, das heißt es gilt $(*)$ aus obiger Bemerkung (2). Dann existiert ein $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und eine Teilfolge (f_{n_j}) von (f_n) mit:

(1) $f_{n_j} \to f$ fast überall auf X.

(2) $\|f_n - f\|_p \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Das heißt $L^p(X)$ ist ein Banachraum ($L^2(X)$ ist ein Hilbertraum).

Bemerkung: Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in 16.4. Im Allgmeinen wird **nicht** gelten, dass fast überall $f_n \to f$ ist.

Beispiel
Sei $X = [0,1]$ und (I_n) sei die folgende Folge von Intervallen:

$$I_1 = [0,1], I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right], I_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right], I_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right], I_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], I_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], I_7 = \left[\frac{3}{4}, 1\right], \ldots$$

Es sei $f_n := \mathbb{1}_{I_n}$, sodass $\int_X f_n \, dx = \int_{I_n} 1 \, dx = \lambda_1(I_n) \to 0$. Also $\hat{f}_n \in L^1(X)$ und $\|\hat{f}_n - \hat{0}\|_1 \to 0$. Ist $x \in X$, so gilt: $x \in I_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass eine Teilfolge I_{n_j} mit $x \in I_{n_j}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert. Somit ist $f_{n_j}(x) = 1$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ und deshalb gilt fast überall $f_n \not\to 0$.

Beweis (von 16.4)
Setze $\varepsilon_j := \frac{1}{2^j}$ $(j \in \mathbb{N})$. Zu ε_1 existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_l - f_{n_1}\|_p < \varepsilon_1$ für alle $l \geq n_1$. Zu ε_2 existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_2$ und $\|f_l - f_{n_2}\|_p < \varepsilon_2$ für alle $l \geq n_2$. Etc.
Wir erhalten eine Teilfolge (f_{n_j}) mit

$$(+) \quad \|f_l - f_{n_j}\|_p < \varepsilon_j \text{ für alle } l \geq n_j \text{ mit } j \in \mathbb{N}$$

Setze $g_j := f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$ $(j \in \mathbb{N})$. Klar: $g_l \in \mathfrak{L}^p(X)$. Für $N \in \mathbb{N}$:

$$S_N := \int_X \left(\sum_{j=1}^{N} |g_j(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Dann:

$$S_N = \left\| \sum_{j=1}^{N} |g_j| \right\|_p \leq \sum_{j=1}^{N} \|g_j\|_p \overset{(+)}{\leq} \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} \leq 1$$

Setze

$$g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x)| \text{ für } x \in X$$

Es ist $g \geq 0$ und messbar. Weiter gilt:

$$0 \leq \int_X g^p \, dx = \int_X \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{N} |g_j|\right)^p dx \overset{6.2}{\leq} \liminf_{N \to \infty} S_N^p \leq 1$$

Somit ist g^p ist integrierbar. Aus 5.2 folgt, dass eine Nullmenge $N_1 \subseteq X$ existiert mit $0 \leq g^p(x) < \infty$ für alle $x \in X \setminus N_1$. Es ist dann auch $0 \leq g(x) < \infty$ für alle $x \in X \setminus N_1$ und somit folgt nach Konstruktion von g, dass $\sum_{j=1}^{\infty} g_j \, dx$ konvergiert absolut in jedem $x \in X \setminus N_1$. Aus Analysis I folgt, dass damit $\sum_{j=1}^{\infty} g_j \, dx$ in jedem $x \in X \setminus N_1$ konvergiert.

Für $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^{m-1} g_j = f_{n_m} - f_{n_1} \implies f_{n_m} = \sum_{j=1}^{m-1} g_j + f_{n_1}$$

Deshalb ist (f_{n_m}) konvergent (in $\mathbb{R}$) für alle $x \in X \setminus N_1$.

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{m \to \infty} f_{n_m}(x) & , x \in X \setminus N_1 \\ 0 & , x \in N_1 \end{cases}$$

Aus §3 ist bekannt, dass f messbar ist. Klar: $f_{n_m} \to f$ fast überall und $f(X) \subseteq \mathbb{R}$. Es ist $f_{n_m} = \sum_{j=1}^{m-1} g_j + f_{n_1}$ und somit

$$|f_{n_m}| = |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{m-1} g_j \leq |f_{n_1}| + |g|$$

Wie im Beweis von Satz 16.1 folgern wir

$$|f_{n_m}|^p \leq 2^p \left(|f_{n_1}|^p + g^p\right) =: \tilde{g}$$

$f_{n_1} \in \mathfrak{L}^p(X)$, g^p ist integrierbar. Aus 16.3 folgt, dass $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und

$$\|f_{n_m} - f\|_p \to 0 \; (m \to \infty)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $m \in M$ so, dass $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|f - f_{n_m}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $l \geq n_m$ gilt:

$$\|f_l - f\|_p = \|f_l - f_{n_m} + f_{n_m} - f\|_p \leq \|f_l - f_{n_m}\|_p + \|f_{n_m} - f\|_p \overset{(+)}{<} \frac{1}{2^m} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Das heißt

$$\|f_l - f\|_p \to 0 \; (l \to \infty)$$

■

Satz 16.5
Sei auch noch $1 \leq q < \infty$. (f_n) sei eine Folge in $\mathfrak{L}^p(X) \cap \mathfrak{L}^q(X)$. Es sei

$$f \in \mathfrak{L}^p(X) \text{ und } g \in \mathfrak{L}^q(X)$$

Weiter gelte:

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \text{ und } \|f_n - g\|_q \to 0 \ (n \to \infty)$$

Dann ist fast überall $f = g$.

Beweis

1. Aus Bemerkung (3) vor 16.4 folgt, dass $(\hat{f}_n)$ ist eine Cachyfolge in $L^p(X)$. Wegen 16.4 existiert dann ein $\varphi \in \mathfrak{L}^p(X)$ und eine Teilfolge (f_{n_j}) mit: $f_{n_j} \to \varphi$ fast überall und $\|f_n - \varphi\|_p \to 0$

   $$\|f - \varphi\|_p = \|f - f_n + f_n - \varphi\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n - \varphi\|_p \to 0 \quad (n \to \infty)$$

   Somit ist $\|f - \varphi\|_p = 0$ und deshalb fast überall $f = \varphi$. Also gilt fast überall $f_{n_j} \to f$. Das heißt, dass es eine Nullmenge $N_1 \subseteq X$ gibt, für die gilt:

   $$f_{n_j}(x) \to f(x) \text{ für alle } x \in X \setminus N_1$$

2. Setze $g_j := f_{n_j}$, dann gilt $\|g_j - g\|_q \to 0 \quad (j \to \infty)$. Wie im ersten Schritt zeigt man, dass eine Nullmenge $N_2 \subseteq X$ und eine Teilmenge (g_{j_k}) existiert mit, für die gilt:

   $$g_{j_k}(x) \to g(x) \text{ für alle } x \in X \setminus N_2$$

Wir wissen, dass $N := N_1 \cup N_2$ eine Nullmenge ist. Sei nun $x \in X \setminus N$. Dann folgt aus dem ersten Schritt $f_{n_j}(x) \to f(x)$ und daraus

$$\underbrace{f_{n_{j_k}}(x)}_{=g_{n_{j_k}}(x)} \to f(x)$$

Aus dem Zweiten Schritt folgt dann, dass $f_{n_{j_k}}(x) \to g(x)$ und somit $f(x) = g(x)$. ■

Bemerkung: Seien $f_n, f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und es gelte $\|f_n - f\|_p \to 0 \quad (n \to \infty)$. Der Beweis von 16.5 zeigt, dass eine Teilfolge (f_{n_j}) von (f_n) existiert mit $f_{n_j} \to f$ fast überall.

Bemerkung: Konvergenz im Sinne der Norm $\|\cdot\|_p$ und punktweise Konvergenz fast überall haben im Allgemeinen **nichts** miteinander zu tun!

Beispiel
Sei (f_n) wie im Beispiel vor 16.4. Also $\|f_n - 0\|_p \to 0$, aber $f_n \nrightarrow 0$ fast überall.

Beispiel
Sei $X = [0, 1]$ und f_n sei wie im Bild. f_n ist stetig, also messbar.

$$\int_X f_n \, dx = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Somit ist $f_n \in \mathfrak{L}^1(X)$.

$$f_n(x) \to \begin{cases} 0, x \in (0,1] \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

Damit gilt fast überall $f_n \to 0$, aber $\|f_n - 0\|_1 = 1 \nrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$

Definition
Seien $(E, \|\cdot\|_1), (F, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume.

(1) Sei (x_n) eine Folge in E und $s_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann heißt (s_n) eine **unendliche Reihe** und wird mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

bezeichnet. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ heißt **konvergent** genau dann, wenn (s_n) konvergiert. In diesem Fall ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} s_n$$

(2) $\Phi\colon E \to F$ sei eine Abbildung. Φ heißt **stetig** in $x_0 \in E$ genau dann, wenn für jede konvergente Folge (x_n) in E mit $x_n \to x_0$ gilt:

$$\Phi(x_n) \to \Phi(x_0)$$

Φ heißt auf E stetig genau dann, wenn Φ ist in jedem $x \in E$ stetig.

(3) Für $(x, y) \in E \times E$ setze

$$\|(x,y)\| := \sqrt{\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2}$$

Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $E \times E$ (nachrechnen!). Weiter gilt, dass $E \times E$ genau dann ein Banachraum ist, wenn E einer ist. Für eine Folge $((x_n, y_n))$ in $E \times E$ und $(x, y) \in E \times E$ gilt

$$(x_n, y_n) \stackrel{\|\cdot\|}{\to} (x,y) \iff x_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} x \wedge y_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} y$$

Bemerkung: Ist (x_n) eine konvergente Folge in E, so ist (x_n) beschränkt (d.h. $\exists c > 0 : \|x_n\|_1 \leq c \forall n \in \mathbb{N}$).

(Beweis wie in Ana I)

Vereinbarung: Für den Rest dieser Vorlesung schreiben wir (meist) f statt $\hat{f}$ und identifizieren $\mathfrak{L}^p(X)$ mit $L^p(X)$. Ebenso schreiben wir $\int_X f \,\mathrm{d}x$ statt $\int_X \hat{f} \,\mathrm{d}x$ und $(f|g)$ statt $(\hat{f}|\hat{g})$.

Beispiel 16.6
(1) Die Abbildung $\Phi : L^p(X) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(f) := \|f\|_p$$

ist stetig auf $L^p(X)$. D.h. für $f_n, f \in L^p(X)$ mit $f_n \stackrel{\|\cdot\|_p}{\to} f$ gilt $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, also

$$\int_X |f_n|^p \,\mathrm{d}x \to \int_X |f|^p \,\mathrm{d}x$$

Beweis
Aus Analysis II §17 folgt:

$$|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p \overset{n\to\infty}{\to} 0$$ ■

(2) Die Abbildung $\Phi : L^1(X) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(f) := \int_X f \, \mathrm{d}x$$

ist stetig auf $L^1(X)$. D.h. aus $f_n, f \in L^1(X)$ und $f_n \overset{\|\cdot\|_1}{\to} f$ folgt

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}x \to \int_X f \, \mathrm{d}x$$

Beweis
Es gilt:

$$\begin{aligned} |\int_X f_n \, \mathrm{d}x - \int_X f \, \mathrm{d}x| &= |\int_X f_n - f \, \mathrm{d}x| \\ &\leq \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}x \\ &= \|f_n - f\|_1 \overset{n\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$ ■

(3) Die Abbildung $\Phi : L^2(X) \times L^2(X) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(f, g) := (f|g)$$

ist stetig auf $L^2(X) \times L^2(X)$. D.h. für $f_n, g_n, f, g \in L^2(X)$ mit $f_n \overset{\|\cdot\|_2}{\to} f$ und $g_n \overset{\|\cdot\|_2}{\to} g$ gilt

$$(f_n|g_n) \overset{n\to\infty}{\to} (f|g)$$

Beweis
Es gilt:

$$\begin{aligned} |(f_n|g_n) - (f|g)| &= |(f_n|g_n) - (f_n|g) + (f_n|g) - (f|g)| \\ &= |(f_n|g_n - g) + (f_n - f|g)| \\ &\leq |(f_n|g_n - g)| + |(f_n - f|g)| \\ &\leq \|f_n\|_2 \cdot \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \cdot \|g\|_2 \overset{n\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$ ■

Satz 16.7
Sei $f = f_+ - f_- \in L^p(X)$ und (g_n) und (h_n) seien zulässige Folgen für f_+ bzw. f_- (d.h. g_n, h_n einfach, $0 \leq g_n \leq g_{n+1}, g_n \to f_+$, $0 \leq h_n \leq h_{n+1}, h_n \to f_-$). Setze $f_n := g_n - h_n$. Dann sind $f_n, g_n, h_n \in L^p(X)$ und es gilt:

$$\|g_n - f_+\|_p \to 0 \qquad \|h_n - f_-\|_p \to 0 \qquad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Beweis
Es genügt den Fall $f \geq 0$ zu betrachten (also $f = f_+$, $f_- \equiv 0$). Sei also (f_n) zulässig für f. Definiere $\varphi := |f_n - f|^p$. Es ist klar, dass punktweise gilt $\varphi_n \to 0$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_n &\leq (|f_n| + |f|)^p \\ &= |f_n + f|^p \leq (2f)^p \\ &= 2^p f^p =: g \end{aligned}$$

Dann ist $g \in L^1(X)$ integrierbar.
Aus 4.9 folgt:

$$\begin{aligned} \varphi \in L^1(X) &\implies f_n - f \in L^p(X) \\ &\implies f_n = (f_n - f) + f \in L^p(X) \end{aligned}$$

Aus 6.2 folgt:

$$\int_X \varphi_n \, \mathrm{d}x \to 0 \implies \|f_n - f\|_p^p \to 0$$

■

Definition

(1) Sei $f : X \to \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

der **Träger** von f

(2) $C_c(X, \mathbb{R}) := \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid \operatorname{supp}(f) \subseteq X \text{ und } \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\}$

Satz 16.8

(1) $C_c(X, \mathbb{R}) \subseteq L^p(X)$

(2) Ist X offen, so liegt $C_c(X, \mathbb{R})$ **dicht** in $L^p(X)$, d.h. ist $f \in L^p(X)$ und $\varepsilon > 0$, so existiert $g \in C_c(X, \mathbb{R})$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Beweis

(1) Sei $f \in C_c(C, \mathbb{R})$ und $K := \operatorname{supp}(f)$, dann ist $K \subseteq X$ kompakt, also $K \in \mathfrak{B}_d$. Es gilt für alle $x \in X \setminus K$ $f(x) = 0$ und damit folgt aus 4.12 $\int_K |f|^p \, \mathrm{d}x < \infty$. Dann gilt:

$$\int_X |f|^p \, \mathrm{d}x = \int_{X \setminus K} |f|^p \, \mathrm{d}x + \int_K |f|^p \, \mathrm{d}x = \int_K |f|^p \, \mathrm{d}x < \infty$$

Also ist $f \in L^p(X)$.

(2) Siehe Übungsblatt 13.

■

§ 17 Das Integral im Komplexen

In diesem Paragraphen sei $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$, $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $u := \mathrm{Re}(f), v := \mathrm{Im}(f)$, also: $u, v : X \to \mathbb{R}, f = u + iv$.

Wir versehen $\mathbb{C}$ mit der σ-Algebra $\mathfrak{B}_2$ (wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$).

Definition
f heißt (Borel-)**messbar**, genau dann wenn gilt: f ist $\mathfrak{B}_d$-$\mathfrak{B}_2$-messbar.

Aus 3.2 folgt: f ist messbar genau dann, wenn u und v messbar sind.

Definition
Sei f messbar. f heißt **integrierbar** (ib.) genau dann, wenn u und v integrierbar sind. In diesem Fall setze

$$\int_X f \, \mathrm{d}x := \int_X u \, \mathrm{d}x + i \int_X v \, \mathrm{d}x \quad (\in \mathbb{C})$$

Es gilt: $|u|, |v| \leq |f| \leq |u| + |v|$ auf X. Hieraus und aus 4.9 folgt: f ist integrierbar genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist.

Definition

$$\mathfrak{L}^p(X, \mathbb{C}) := \{f : X \to \mathbb{C} | f \text{ ist messbar und } \int_X |f|^p \, \mathrm{d}x < \infty\}$$

(Achtung: mit den Betragsstrichen in ob. Integral ist der komplexe Betrag gemeint!)

$$\mathcal{N} := \{f : X \to \mathbb{C} | f \text{ ist messbar und } f = 0 \text{ f.ü.}\}$$

$\mathfrak{L}^p(X, \mathbb{C})$ ist ein komplexer Vektorraum (siehe 17.1) und $\mathcal{N}$ ist ein Untervektorraum von $\mathfrak{L}^p(X, \mathbb{C})$.

$$L^p(X, \mathbb{C}) := \mathfrak{L}^p(X, \mathbb{C}) / \mathcal{N}$$

Definition
Für $f, g \in L^2(X, \mathbb{C})$ setze

$$(f|g) := \int_X f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x$$

sowie

$$f \perp g :\Longleftrightarrow (f|g) = 0 \qquad (f \text{ und } g \text{ sind } \textbf{orthogonal}).$$

($\overline{z}$ bezeichne hierbei die komplex Konjugierte von z, vgl. Lineare Algebra).

Klar:

(1) $L^p(X, \mathbb{C})$ ist mit $\|f\|_p := (\int_X |f|^p \, \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$ ein komplexer normierter Raum (NR).

(2) $(f|g)$ definiert ein Skalarprodukt auf $L^2(X, \mathbb{C})$. Es ist

$$(f|g) = \overline{(g|f)},$$

$$(f|f) = \int_X f(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_X |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \|f\|_2^2, \text{ also:}$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)} \quad (f, g \in L^2(X, \mathbb{C}))$$

(Beachte: es ist $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ für $z \in \mathbb{C}$).

Inoffizielle Anmerkung: Dieses Skalarprodukt ist auf $\mathbb{C}$ nur linear in der ersten Komponente! Wenn man einen $\mathbb{C}$-Skalar aus der zweiten Komponente rausziehen möchte, muss man diesen komplex konjugieren:

$$\alpha \in \mathbb{C}: \quad \begin{aligned} (f|\alpha g) &= \overline{\alpha}(f|g) \\ (\alpha f|g) &= \alpha(f|g) \end{aligned}$$

Satz 17.1

(1) Seien $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

(i) $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar und

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_X f\,dx + \beta \int_X g\,dx$$

(ii) $\operatorname{Re}\left(\int_X f\,dx\right) = \int_X \operatorname{Re}(f)\,dx$ und $\operatorname{Im}\left(\int_X f\,dx\right) = \int_X \operatorname{Im}(f)\,dx$

(iii) $\overline{f}$ ist integrierbar und

$$\int_X \overline{f}\,dx = \overline{\int_X f\,dx}$$

(2) Die Sätze 16.1 bis 16.3 und das Beispiel 16.6 gelten in $L^p(X, \mathbb{C})$.

(3) $L^p(X, \mathbb{C})$ ist ein komplexer Banachraum, $L^2(X, \mathbb{C})$ ist ein komplexer Hilbertraum.

Beispiel 17.2

Sei $X = [0, 2\pi]$. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$e_k(t) := e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt) \qquad \text{und} \qquad b_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_k$$

Dann gilt: $b_k, e_k \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ und

$$\int_0^{2\pi} e_0(t)\,dt = 2\pi$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ und $k \neq 0$ ist

$$\int_0^{2\pi} e_k(t)\,dt = \frac{1}{ik} e^{ikt}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{ik}\left(e^{2\pi ki} - 1\right) = 0$$

Damit ist

$$(b_k \mid b_l) = \int_0^{2\pi} b_k \overline{b_l}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t}\, dt = \begin{cases} 1, \text{falls } k = l \\ 0, \text{falls } k \neq l \end{cases}$$

Insbesondere ist $\|b_k\|_2 = 1$. Das heißt $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist ein **Orthonormalsystem** in $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.
Zur Übung: $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist linear unabhängig in $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.

Definition
Sei $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $L^2(X, \mathbb{C})$.

(1) Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$s_n := \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k = \sum_{|k|\leq n} \alpha_k = \alpha_{-n} + \alpha_{-(n-1)} + \cdots + \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

Existiert $\lim_{n\to\infty} s_n$ in $\mathbb{C}$, so schreiben wir $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k := \lim_{n\to\infty} s_n$

(2) Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$\sigma_n := \sum_{k=-n}^{n} f_k = \sum_{|k|\leq n} f_k$$

Gilt für ein $f \in L^2(X, \mathbb{C})$: $\|f - \sigma_n\|_2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so schreiben wir

$$f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \quad \Big(= \lim_{n\to\infty} \sigma_n \text{ im Sinne der } L^2\text{-Norm}\Big)$$

Definition
Sei $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ wie in 17.2. $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ heißt eine **Orthonormalbasis (ONB)** von $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ genau dann, wenn es zu jedem $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ eine Folge

$$(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$$

gibt, mit

$$(*) \qquad f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k b_k$$

Frage: Ist $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB von $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$?
Antwort: Ja! In 18.5 werden wir sehen, dass $(*)$ gilt mit $c_k = (f \mid b_k)$.

§ 18 Fourierreihen

In diesem Paragraphen sei stets $X = [0, 2\pi]$, $L^2 := L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ und $L^2_{\mathbb{R}} := L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Weiter sei $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ wie in 17.2.

Satz 18.1
Ist $f \in L^2$ und gilt mit einer Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$: $f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k b_k$, so gilt:

$$c_k = (f \mid b_k) \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

Beweis
Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$\sigma_n := \sum_{|k|\leq n} c_k b_k$$

Aus der Voraussetzung folgt $\|\sigma_n - f\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$. Sei $j \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq |j|$. Es gilt einerseits

$$(\sigma_n \mid b_j) = \sum_{|k|\leq n} c_k (b_k \mid b_j) = c_j, \text{ da gilt: } (b_k \mid b_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq j \\ 1, & \text{falls } k = j \end{cases}$$

Andererseits: $(\sigma_n \mid b_j) \to (f \mid b_j)$ für $n \to \infty$ wegen 16.6(3). Daraus folgt $c_j = (f \mid b_j)$ ∎

Definition
Sei $f \in L^2$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$.

(1) $S_n f := \sum_{|k|\leq n} (f \mid b_k) b_k$ heißt **n-te Fouriersche Partialsumme**. Also gilt:

$$f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f \mid b_k) b_k \iff \|f - S_n f\|_2 \to 0$$

(2) $(f \mid b_k)$ heißt **k-ter Fourierkoeffizient von f**.

(3) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (f \mid b_k) b_k$ heißt **Fourierreihe von f**.

(4) Für $n_0 \in \mathbb{N}_0$ setze $E_n := [b_{-n}, b_{-(n-1)}, \ldots, b_0, b_1, \ldots, b_n]$ (lineare Hülle). Es ist dann

$$\dim E_n = 2n + 1$$

Beachte: Für $v \in E_n$ gilt $v(0) = v(2\pi)$.

Satz 18.2
Seien $f_1, \dots, f_n, f \in L^2$.

(1) Gilt $f_\mu \perp f_\nu$ für $\mu \neq \nu$ $(\mu, \nu = 1, \dots, n)$, so gilt der Satz des Pythagoras

$$\|f_1 + \dots + f_n\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \dots + \|f_n\|_2^2$$

(2) Die Abbildung

$$S_n\colon \begin{cases} L^2 \to E_n \\ S_n f := \sum_{|k| \leq n} (f \mid b_k) b_k \end{cases}$$

ist linear und für jedes $v \in E_n$ gilt $S_n v = v$ und $(f - S_n f) \perp v$ mit $f \in L^2$.

(3) Die **Besselsche Ungleichung** lautet:

$$\|S_n f\|_2^2 = \sum_{|k| \leq n} |(f \mid b_k)|^2 = \|f\|_2^2 - \|(f - S_n f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

(4) Für alle $v \in E_n$ gilt:

$$\|f - S_n f\|_2 \leq \|f - v\|_2$$

Beweis

(1) Es genügt den Fall $n = 2$ zu betrachten, der Rest folgt induktiv.

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_2^2 &= (f_1 + f_2 \mid f_1 + f_2) \\ &= (f_1 \mid f_1) + (f_1 \mid f_2) + (f_2 \mid f_1) + (f_2 \mid f_2) \\ &= (f_1 \mid f_1) + (f_2 \mid f_2) \\ &= \|f_1\|_2^2 + \|f_2\|_2^2 \end{aligned}$$

(2) Übung!

(3) Es gilt

$$\|S_n f\|_2^2 = \left\| \sum_{|k| \leq n} (f \mid b_k) b_k \right\|_2^2 \overset{(1)}{=} \sum_{|k| \leq n} \|(f \mid b_k) b_k\|_2^2 = \sum_{|k| \leq n} |(f \mid b_k)|^2 \|b_k\|_2^2 = \sum_{|k| \leq n} |(f \mid b_k)|^2$$

und

$$\|f\|_2^2 = \| \underbrace{(f - S_n f)}_{\underset{(2)}{\perp} E_n} + \underbrace{S_n f}_{\in E_n} \|_2^2 = \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f\|_2^2$$

(4) Sei $v \in E_n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|f - v\|_2^2 &= \| \underbrace{(f - S_n f)}_{\perp E_n} + \underbrace{(S_n f - v)}_{\in E_n} \|_2^2 \\ &\overset{(1)}{=} \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f - v\|_2^2 \\ &\geq \|f - S_n f\|_2^2 \end{aligned}$$

■

Bemerkung 18.3
Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $I := [a, b]\,(a < b)$ und $f_n, f, g \in C(I, \mathbb{K})$; es war $\|f\|_\infty := \max_{t \in I} |f(t)|$.

(1) (f_n) konvergiert auf I gleichmäßig gegen f genau dann, wenn $\|f_n - f\|_\infty \to 0\,(n \to \infty)$ (vgl. Analysis I/II).

(2) $f \in \mathrm{L}^p(I, \mathbb{K})$ und $\|f\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$ (siehe 16.2).

(3) Gilt $f = g$ fast überall, so ist $f = g$ auf I.

Beweis
Es existiert eine Nullmenge $N \subseteq I : f(x) = g(x)\,\forall x \in I \setminus N$.
Sei $x_0 \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon > 0$ gilt: $U_\varepsilon(x_0) \cap I \not\subseteq N$ (andernfalls: $\lambda_1(N) \geq \lambda_1(U_\varepsilon(x_0) \cap I) > 0$). Das heißt, es existiert ein $x_\varepsilon \in U_\varepsilon(x_0) \cap I : x_\varepsilon \notin N$. Also: $\forall n \in \mathbb{N}\,\exists x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap I : x_n \notin N$.
Also: $x_n \to x_0$.
Dann: $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$ ■

Satz 18.4 (Approximationssatz von Weierstraß)
Es sei $I = [a, b]$ wie in 18.3 und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(1) Ist $f \in C(I, \mathbb{K})$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein Polynom p mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ mit:
$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon$$

(2) Ist $a = 0$, $b = 2\pi$, $f \in C(I, \mathbb{K})$, $f(0) = f(2\pi)$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $v \in \mathrm{E}_n$ mit:
$$\|f - v\|_\infty < \varepsilon$$

Satz 18.5
Sei $f \in \mathrm{L}^2$. Dann gilt: $f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f \mid b_k) b_k$ und
$$\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(f \mid b_k)|^2 \quad \textbf{(Parsevalsche Gleichung)}$$
Insbesondere gilt: $(f \mid b_k) \to 0 \quad (|k| \to \infty)$.

Beweis
Zu zeigen: $\|f - S_n f\|_2 \to 0\,(n \to \infty)$. Die Parsevalsche Gleichung folgt dann aus 18.2.
Sei $\varepsilon > 0$. Wende 16.8(2) auf $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ an. Dies liefert eine stetige Funktion $g : (0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ mit: $K := \operatorname{supp}(g) \subseteq (0, 2\pi)$, K kompakt und $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.
Setze $g(0) := g(2\pi) := 0$. Dann ist g stetig auf $[0, 2\pi]$. Satz 18.4 liefert nun: $\exists n \in \mathbb{N} \exists v \in \mathrm{E}_n : \|g - v\|_\infty < \varepsilon$.

Damit: $\|g-v\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|g-v\|_\infty < \sqrt{2\pi}\varepsilon$. Somit:

$$\begin{aligned}\|f-S_nf\|_2 &= \|f-g+g-S_ng+S_ng-S_nf\|_2\\ &\leq \underbrace{\|f-g\|_2}_{<\varepsilon}+\underbrace{\|g-S_ng\|_2}_{\overset{18.2(4)}{\leq}\|g-v\|_2}+\underbrace{\|S_n(g-f)\|_2}_{\overset{18.2(3)}{\leq}\|g-f\|_2}\\ &< 2\varepsilon+\sqrt{2\pi}\varepsilon = \varepsilon(2+\sqrt{2\pi})\end{aligned}$$

Sei $m \geq n$. Dann gilt: $\mathrm{E}_n \subseteq \mathrm{E}_m$, also $w := S_nf \in \mathrm{E}_m$. Damit:

$$\|f-S_mf\|_2 \leq \|f-w\|_2 = \|f-S_nf\|_2 < \varepsilon(2+\sqrt{2\pi})$$

■

Reelle Version

Sei $f \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}$. Es gelten die folgenden Bezeichnungen:

(1) Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Funktionen $t \mapsto \cos(kt)$ und $t \mapsto \sin(kt)$ mit $\cos(k\cdot)$ bzw. $\sin(k\cdot)$.

(2) Für $k \in \mathbb{N}_0: \alpha_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}(f \mid e_k)$.
Für $k \in \mathbb{N}: \beta_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(f \mid e_k)$, $\beta_0 := 0$.

Definition
f heißt **gerade** (bezüglich π) genau dann, wenn gilt: $f(t) = f(2\pi - t)$ für fast alle $t \in [0, 2\pi]$.
f heißt **ungerade** (bezüglich π) genau dann, wenn gilt: $f(t) = -f(2\pi - t)$ für fast alle $t \in [0, 2\pi]$.

Satz 18.6
(Dieser Satz folgt aus 18.5 und "etwas" rechnen)
Sei $f \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

(1) $S_nf = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n(\alpha_k\cos(k\cdot)+\beta_k\sin(k\cdot))$

(2) $f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty(\alpha_k\cos(k\cdot)+\beta_k\sin(k\cdot))$

(3) $\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^\infty(\alpha_k^2+\beta_k^2)$ (Parsevalsche Gleichung)
Insbesondere gilt: $\alpha_k \to 0$, $\beta_k \to 0$ $(k \to \infty)$

(4) Ist f gerade, so sind alle $\beta_k = 0$ und $\alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(kt)\mathrm{d}t$. Die Fourierreihe von f ist eine **Cosinusreihe**.
Ist f ungerade, so sind alle $\alpha_k = 0$ und $\beta_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(kt)\mathrm{d}t$. Die Fourierreihe von f ist eine **Sinusreihe**.

Beispiele:
(i) $f(t) := \begin{cases}1, & 0 \leq t \leq \pi\\ -1, & \pi < t \leq 2\pi\end{cases}$

f ist ungerade, also $\alpha_k = 0\,\forall k \in \mathbb{N}_0$. Es ist $\beta_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(kt)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$.

Damit:

$$f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)\cdot)}{2j+1}$$

Beachte: $(S_n f)(0) = 0 \to 0 \neq 1 = f(0)$ und $(S_n f)(2\pi) = 0 \to 0 \neq -1 = f(2\pi)$.

(ii) $f(t) := \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 2\pi - t, & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

f ist gerade, das heißt $\beta_k = 0\,\forall k \in \mathbb{N}$ und $\alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(kt)\mathrm{d}t$, $\alpha_0 = \pi$.

Für $k \geq 1: \quad \alpha_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$.

Damit:

$$f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)\cdot)}{(2j+1)^2}$$

Satz 18.7
Sei $f \in L^2$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(f|b_k)| < \infty$. Dann:

(1) Die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(f \mid b_k)b_k(t)$ konvergiert auf $[0,2\pi]$ absolut und gleichmäßig. Setzt man $g(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}}(f \mid b_k)b_k(t)$ für $t \in [0,2\pi]$, so ist g stetig, $g(0) = g(2\pi)$ und $f = g$ f.ü. auf $[0,2\pi]$.

(2) Ist f stetig, so gilt $f = g$ auf $[0,2\pi]$, also:

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(f \mid b_k)b_k(t) \quad \forall t \in [0,2\pi]$$

Insbesondere: $f(0) = f(2\pi)$

Beweis

(1) $f_k(t) := (f \mid b_k)b_k(t)$;

$$|f_k(t)| = |(f \mid b_k)| \cdot |b_k(t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|(f \mid b_k)| \quad \forall t \in [0,2\pi]\forall k \in \mathbb{Z}$$

Aus Analysis I, 19.1(2) (Konvergenzkriterium von Weierstraß) folgt: Die Reihe in (1) konvergiert auf $[0,2\pi]$ absolut und gleichmäßig. Aus Analysis I, 19.2 folgt: g ist stetig. Klar: $g(0) = g(2\pi)$.

$$s_n(t) := \sum_{|k|\leq n} f_k(t) \quad (n \in \mathbb{N}_0, t \in [0,2\pi]).$$

Aus 18.5 folgt: $\|f - s_n\|_2 \to 0 (n \to \infty)$. $\|g - s_n\|_2 \overset{18.3(2)}{\leq} \|g - s_n\|_\infty \sqrt{2\pi} \to 0 (n \to \infty)$
Also: $\|g - s_n\|_2 \to 0 (n \to \infty)$ Aus 16.5 folgt: $f = g$ f.ü.

(2) $f = g$ f.ü. $\overset{18.3(3)}{\Longrightarrow}$ $f = g$ auf $[0,2\pi]$. ■

Satz 18.8
$f \in L^2_{\mathbb{R}}$ und die Folgen (α_k) und (β_k) seien definiert wie im Abschnitt "Reelle Version". Weiter gelte: $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k| < \infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k| < \infty$. Dann gelten die Aussagen in 18.7 für die Reihen in 18.6.

Satz 18.9
Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ **stetig differenzierbar** und $f(0) = f(2\pi)$.

(1) Es ist $(f' \mid b_k) = ik(f \mid b_k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|(f \mid b_k)| < \infty$ (d.h.: die Voraussetzungen von 18.7 sind erfüllt)

Beweis
(1)

$$\begin{aligned}
(f'|b_k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{P.I.}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[f(t)e^{-ikt}\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)(-ik)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f(2\pi) - f(0)) + ik(f|b_k).
\end{aligned}$$

(2) Setze $\sigma_n := \sum_{|k|\le n} |(f|b_k)| \quad (n \in \mathbb{N}_0)$. Es genügt zu zeigen: (σ_n) ist beschränkt. Klar: $0 \le \sigma_n$.

$$\begin{aligned}
\sigma_n - |(f|b_0)| &= \sum_{0<|k|\le n} |(f|b_k)| \overset{(1)}{=} \sum_{0<|k|\le n} \underbrace{\frac{1}{|k|}}_{:=u_k} \underbrace{(f'|b_k)}_{:=v_k} \\
&= \sum_{0<|k|\le n} u_k v_k \overset{\text{CS-Ugl.}}{\le} \left(\sum_{0<|k|\le n} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{0<|k|\le n} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(2\sum_{k=1}^{n} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{0<|k|\le n} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\overset{18.2(3)}{\le} \|f'\|_2} \\
&\le \left(2\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \|f'\|_2
\end{aligned}$$

■

Beispiel
(1) f sei wie im Beispiel (2) vor 18.7. Es war:

$$f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)\cdot)}{(2j+1)^2} \qquad \left(\alpha_{2j+1} = \frac{1}{(2j+1)^2}, \alpha_{2j} = 0\right)$$

Aus 18.7 bzw. 18.8 folgt:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos((2j+1)t)}{(2j+1)^2} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Setzt man nun $t = 0$, folgt

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}$$

und man erhält durch Umstellen eine Auswertung für diese eigentlich kompliziert wirkende Reihe:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

(dass diese Reihe konvergiert, ist eine einfache Übung aus Ana I; ihren Wert aber haben wir bislang noch nicht berechnet)

(2) $f(t) = (t-\pi)^2 \quad (t \in [0, 2\pi])$. f ist gerade bzgl. π, also ist $\beta_k = 0$. Es ist

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi^2, & k = 0 \\ \frac{4}{k^2}, & k \geq 1 \end{cases} \quad \text{(nachrechnen!)}$$

Also:

$$f \overset{\|\cdot\|_2}{=} \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(j\cdot)}{j^2}$$

Aus 18.9 bzw. 18.7(2) folgt:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(jt)}{j^2} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Setzt man nun $t = 0$, erhält man

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}, \text{ also } \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Damit erhält man z.B. auch

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j)^2} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

und damit

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \ldots = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

§ A Satz um Satz (hüpft der Has)

§ B Credits für Analysis III

Abgetippt haben die folgenden Paragraphen:
§ 1: σ-Algebren und Maße: Rebecca Schwerdt, Peter Pan, Philipp Ost
§ 2: Das Lebesguemaß: Rebecca Schwerdt, Philipp Ost
§ 3: Messbare Funktionen: Rebecca Schwerdt, Philipp Ost
§ 4: Konstruktion des Lebesgueintegrals: Rebecca Schwerdt, Philipp Ost, Peter Pan
§ 5: Nullmengen: Rebecca Schwerdt, Jan Ihrens, Philipp Ost
§ 6: Der Konvergenzsatz von Lebesgue: Philipp Ost, Jan Ihrens
§ 7: Parameterintegrale: Jan Ihrens
§ 8: Vorbereitungen: Jan Ihrens
§ 9: Das Prinzip von Cavalieri: Jan Ihrens, Rebecca Schwerdt
§ 10: Der Satz von Fubini: Jan Ihrens
§ 11: Der Transformationssatz: Jan Ihrens, Rebecca Schwerdt
§ 12: Vorbereitungen für die Integralsätze: Rebecca Schwerdt
§ 13: Der Integralsatz von Gauß im $\mathbb{R}^2$: Benjamin Unger
§ 14: Flächen im $\mathbb{R}^3$: Benjamin Unger
§ 15: Der Integralsatz von Stokes: Philipp Ost
§ 16: $\mathfrak{L}^p$-Räume und L^p-Räume: Philipp Ost, Rebecca Schwerdt, Peter Pan, Jan Ihrens
§ 17: Das Integral im Komplexen: Peter Pan, Jan Ihrens
§ 18: Fourierreihen: Jan Ihrens, Philipp Ost, Peter Pan