1 Fragen zu Definitionen

1.) Definition topologischer Raum

Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathfrak{T})$ bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

(ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$

(iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen **offene Teilmengen** von X.

$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Ich glaube es ist unnötig in (i) zu fordern, dass $\emptyset \in \mathfrak{T}$ gilt, da man das mit (iii) bereits abdeckt:

Sei in (iii) die Indexmenge $I = \emptyset$. Dann muss gelten:

$$\bigcup_{i \in \emptyset} U_i = \emptyset \in \mathfrak{T}$$

4.) Knotendiagramm:

Definition 2

Ein **Knotendiagramm** eines Knotens γ ist eine Projektion $\pi : \mathbb{R}^3 \to E$ auf eine Ebene E, sodass $|\pi^{-1}(x) \cap C| \leq 2$ für jedes $x \in D$, wobei $C = \gamma(S^1)$.

Ist $(\pi|C)^{-1}(x) = \{ y_1, y_2 \}$, so **liegt** y_1 **über** y_2, wenn $(y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$ für ein $\lambda > 1$ ist.

Sollte das jeweils $\pi|_C$ (sprich: „π eingeschränkt auf C“) sein?

Was ist D? Ich vermute, das sollte E sein.

Ich würde die Definition eher so schreiben:

Definition 3

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ ein Knoten, E eine Ebene und $\pi : \mathbb{R}^3 \to E$ eine Projektion auf E.

π heißt **Knotendiagramm** von γ, wenn gilt:

$$\left| \left(\pi|_{\gamma([0,1])} \right)^{-1}(x) \right| \leq 2 \quad \forall x \in E$$

Ist $(\pi|_{\gamma([0,1])})^{-1}(x) = \{ y_1, y_2 \}$, so **liegt** y_1 **über** y_2, wenn gilt:

$$\exists \lambda > 1 : (y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$$

Ist meine Definition äquivalent zu der aus der Vorlesung?

5.) Isotopie/Knoten

Definition 4

Zwei Knoten $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

gibt mit

$$\begin{aligned} H(z,0) &= \gamma_1(z) \quad {\color{red}\forall z \in S^1} \\ H(z,1) &= \gamma_2(z) \quad {\color{red}\forall z \in S^1} \end{aligned}$$

und für jedes feste $t \in [0,1]$ ist

$$H_z : S^1 \to \mathbb{R}^2, z \mapsto H(z,t)$$

ein Knoten. Die Abbildung H heißt **Isotopie** zwischen γ_1 und γ_2.

Fehlt hier nicht etwas wie „$\forall z \in S^1$“ (nun rot ergänzt).

6.) Basisbeispiele

- Kennst du ein Beispiel für eine Subbasis in einem Topologischen Raum, die zugleich eine Basis ist?
- Kennst du ein Beispiel für eine Subbasis in einem Topologischen Raum, die keine Basis ist?
- Kennst du ein Beispiel für eine Basis in einem Topologischen Raum, die keine Subbasis ist?

9.) Mannigfaltigkeit mit Rand

Definition 5

Sei X ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$.

a) Eine n-dimensionale **Karte** auf X ist ein Paar (U, φ), wobei $U \subseteq X$ offen und $\varphi : U \to V$ Homöomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

b) Ein n-dimensionaler **Atlas** $\mathcal{A}$ auf X ist eine Familie $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ von Karten auf X, sodass $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

c) X heißt (topologische) n-dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn X hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und ein n-dimensionalen Atlas besitzt.

Definition 6

Sei X ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie. X heißt n-dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas (U_i, φ_i) gibt, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen und φ_i ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$R^n_{+,0} := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \}$$

ist.

Wieso wird bei der Mannigfaltigkeit mit Rand nicht gefordert, dass sie eine abzählbare Basis haben soll? Sollte man nicht vielleicht hinzufügen, dass der Atlas n-dimensional sein soll?

11.) Produkttopologie

Definition 7

Seien X_1, X_2 topologische Räume.
$U \subseteq X_1 \times X_2$ sei offen, wenn es zu jedem $x = (x_1, x_2) \in U$ Umgebungen U_i um x_i mit $i = 1, 2$ gibt, sodass $U_1 \times U_2 \subseteq U$ gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times X_2$. Sie heißt **Produkttopologie**. $\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$ ist eine Basis von $\mathfrak{T}$.

Gibt es ein Beispiel, das zegit, dass nicht $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}$ gilt?

12.) Δ^2 explizit

Wie sieht der Standard-Simplex der dim. 2, also Δ^2, explizit notiert aus? Praktisch ist das ja die konvexe Hülle der Standard-Basisvektoren e_0, e_1, e_2 (also $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), also ein Polyeder mit vier Flächen im $\mathbb{R}^3$ (jedoch kein regelmäßiges Tetraeder, oder?)

Das ist dann nur das Gitter dieses Polyeders, aber nicht die Flächen oder sogar etwas innerhalb vom Polyeder, oder?

13.) Normalenvektor

Definition 8

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

a) Für $t \in I$ sei $n(t)$ **Normalenvektor** an γ in t, d. h.

$$\langle n(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \quad \|n(t)\| = 1$$

und $\det((\gamma_1(t), n(t))) = +1$

b) Nach **??** sind $n(t)$ und $\gamma''(t)$ linear abhängig, d. h. es gibt $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ mit

$$\gamma''(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$$

$\kappa(t)$ heißt **Krümmung** von γ in t.

Definition 9

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

a) Für $t \in I$ heißt $\kappa(t) := \|\gamma''(t)\|$ die **Krümmung** von γ in t.

b) Ist für $t \in I$ die Ableitung $\gamma''(t) \neq 0$, so heißt $\gamma''(t)$ **Normalenvektor** an γ in t.

c) $b(t)$ sei ein Vektor, der $\gamma'(t), n(t)$ zu einer orientierten Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt. Also gilt:

$$\det(\gamma'(t), n(t), b(t)) = 1$$

$b(t)$ heißt **Binormalenvektor**, die Orthonormalbasis

$$\{\, \gamma'(t), n(t), b(t) \,\}$$

heißt **begleitendes Dreibein**.

Die beiden Definitionen eins Normalenvektors / der Krümmung scheinen mir äquivalent zu sein. Warum haben wir beide? Ich würde die zweite bevorzugen.

14.) Dimension von Simplizes

Gibt es 0-Dimensionale Simplizes?

15.) Existenz der Parallelen

Definition 10

§5) **Parallelenaxiom**: Für jedes $g \in G$ und jedes $P \in X \setminus g$ gibt es höchstens ein $h \in G$ mit $h \cap g = \emptyset$. h heißt **Parallele zu g durch P**.

Soll hier wirklich „mindestens“ stehen? Wie beweist man, dass es genau eine gibt?