# Aufgabe 1

**Gegeben:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 14 \\ 3 & 14 & 34 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe:** Durch Gauß-Elimination die Cholesky-Zerlegung $A = \overline{L}\overline{L}^T$ berechnen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 14 \\ 3 & 14 & 34 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ + & \\ & + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 25 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =: R$$

$L = (L^{(2)} \cdot L^{(1)})^{-1}$[1]

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt:

$$A = LR = L(DL^T) \tag{1}$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{(LD^{\frac{1}{2}})}_{=:\overline{L}}(D^{\frac{1}{2}}L^T) \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \tag{4}$$

[1] Da dies beides Frobeniusmatrizen sind, kann einfach die negierten Elemente unter der Diagonalmatrix auf die Einheitsmatrix addieren um das Ergebnis zu erhalten

$$\Rightarrow D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\overline{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

# Aufgabe 2

## Teilaufgabe i

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
2x - e^{-x} &= 0 && (8)\\
\Leftrightarrow 2x &= e^{-x} && (9)\\
& && (10)
\end{aligned}
$$

Offensichtlich ist $g(x) := 2x$ streng monoton steigend und $h(x) := e^{-x}$ streng monoton fallend.

Nun gilt: $g(0) = 0 < 1 = e^0 = h(0)$. Das heißt, es gibt keinen Schnittpunkt für $x \leq 0$.

Außerdem: $g(1) = 2$ und $h(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} < 2$. Das heißt, für $x \geq 1$ haben $g$ und $h$ keinen Schnittpunkt.

Da $g$ und $h$ auf $[0, 1]$ stetig sind und $g(0) < h(0)$ sowie $g(1) > h(1)$ gilt, müssen sich $g$ und $h$ im Intervall mindestens ein mal schneiden. Da beide Funktionen streng monoton sind, schneiden sie sich genau ein mal.

Ein Schnittpunkt der Funktion $g, h$ ist äquivalent zu einer Nullstelle der Funktion $f$. Also hat $f$ genau eine Nullstelle und diese liegt in $[0, 1]$.

## Teilaufgabe ii

$$
\begin{aligned}
2x - e^{-x} &= 0 && (11)\\
\Leftrightarrow 2x &= e^{-x} && (12)\\
\Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \cdot e^{-x} = F_1(x) && (13)\\
\overset{x\in\mathbb{R}^+}{\Rightarrow} \ln(2x) &= -x && (14)\\
\Leftrightarrow x &= -\ln(2x) = F_2(x) && (15)
\end{aligned}
$$

Gleichung 13 zeigt, dass der Fixpunkt von $F_1$ mit der Nullstelle von $f$ übereinstimmt.

Gleichung 15 zeigt, dass der Fixpunkt von $F_1$ mit der Nullstelle von $f$ übereinstimmt. Da es nur in $[0, 1]$ eine Nullstelle gibt (vgl. Teilaufgabe i), ist die Einschränkung von $x$ auf $\mathbb{R}^+$ irrelevant.

Man sollte $F_1$ zur Fixpunktiteration verwenden, da $\ln(x)$ nur für $x > 0$ definiert ist. Bei der Iteration kommt man aber schnell in einen Bereich, der nicht erlaubt ist (das erlaubte Intervall ist klein; Rechenungenauigkeit)

$F_1$ ist auf $[0, 1]$ eine Kontraktion mit Kontraktionszahl $\theta = \frac{1}{2}$:

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ex. ein $\xi \in (a, b)$ mit $0 \leq a < b \leq 1$, sodass gilt:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = -\frac{1}{2}e^{-\xi} \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\|F(b) - F(a)\|}{\|b - a\|} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^{\xi}} < \frac{1}{2e^a} \tag{18}$$

$$\Leftrightarrow \|F(b) - F(a)\| < \frac{1}{2e^a}|b - a| \tag{19}$$

$$\Rightarrow \forall x, y \in [0, 1] : |F(x) - F(y)| < \frac{1}{2}|x - y| \tag{20}$$

Die Ableitung $F_2' = -\frac{1}{x}$. Da $F_2(1) \neq 1$ ist $x^* \neq 1$. Also ist $|F_2'(x^*)| > 1$. Deshalb konvergiert das Iterationsverfahren definiert durch $F_2$ nicht gegen $x^*$ für Startwerte ungleich $x^*$.

Gegen $F_2$ spricht auch, dass log nur auf $\mathbb{R}^+$ definiert ist. Das kann bei Rundungsfehlern eventuell zu einem Fehler führen. (vgl. Python-Skript)

## Teilaufgabe iii

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2x_k - e^{-x_k}}{2 + e^{-x_k}}$$

Laut Wolfram|Alpha ist die Lösung etwa 0.35173371124919582602

# Aufgabe 3

| $f_i$ | 8 | 3 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 3 |

## Teilaufgabe i

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} f_i \cdot L_i(x) \tag{21}$$

mit

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \ldots = \frac{x^3-4x^2+3x}{-8} \tag{22}$$

$$L_1(x) = \frac{x^3-3x^2-x+3}{3} \tag{23}$$

$$L_2(x) = \frac{x^3-2x^2-3x}{-4} \tag{24}$$

$$L_3(x) = \frac{x^3-x}{24} \tag{25}$$

## Teilaufgabe ii

Anordnung der dividierten Differenzen im so genannten Differenzenschema:

$$\begin{array}{llll}
f[x_0] = f_0 = 8 & & & \\
f[x_1] = 3 & f[x_0,x_1] = \frac{f[x_0]-f[x_1]}{x_0-x_1} = -5 & & \\
f[x_2] = 4 & 1 & 3 & \\
f[x_3] = 8 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}
\end{array}$$

Also:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1]\cdot(x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2]\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) \tag{26}$$

$$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3]\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) \tag{27}$$

$$= 8 - 5\cdot(x-x_0) + 3\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) \tag{28}$$

$$-\frac{2}{3}\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) \tag{29}$$

## Aufgabe 4

Nach der Substitutionsregel gilt:

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x)\mathrm{d}x = (x_3 - x_2) \cdot \int_0^1 f(x_2 + \tau(b-a))\mathrm{d}\tau$$

Wenn $f$ ein Polynom vom Grad $q$ war, so ist auch das neue Integral ein Polynom vom Grad $q$.

Ein Polynom, das vier Punkte interpoliert, hat maximal Grad 3. Da wir das Integral über dieses Polynom im Bereich $[x_2, x_3]$ exakt berechnen sollen, muss die Quadraturformel vom Grad $p = 4$ sein.

TODO

## Aufgabe 5

Das explizite Euler-Verfahren dient der numerischen Lösung eines Anfangswertproblems (Differentialgleichungen).

Wir haben das nicht in der Vorlesung gemacht, also wird das wohl nicht relevant sein.