1 Fragen zu Definitionen

17.) Simpliziale Abbildungen

Wenn man Simpliziale Abbildungen wie folgt definiert

Definition 1

Seien K, L Simplizialkomplexe. Eine stetige Abbildung

$$f : |K| \to |L|$$

heißt **simplizial**, wenn für jedes $\Delta \in K$ gilt:

a) $f(\Delta) \in L$

b) $f|_\Delta : \Delta \to f(\Delta)$ ist eine affine Abbildung.

Dann ist die Forderung „$f(\Delta) \in L$" doch immer erfüllt, oder? Gibt es eine Abbildung $f : |K| \to |L|$ mit $f(\Delta) \notin L$?

18.) ÜB 1, Aufgabe 2

Vor.: Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Weiter bezeichne $\mathfrak{T}$ die von d auf X erzeugte Topologie $\mathfrak{T}'$, die von der auf $A \times A$ eingeschränkten Metrik $d|_{A\times A}$ erzeugte Topologie.

Beh.: Die Topologie $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}|_A$ (Spurtopologie) stimmen überein.

Bew.:

„$\mathfrak{T}|_A \subseteq \mathfrak{T}'$":

Sei $U \in \mathfrak{T}|_A = \{ V \cap A \mid V \in \mathfrak{T} \}$.
Dann ex. also $V \in \mathfrak{T}$ mit $U = V \cap A$.
Sei $x \in U$.
Da $V \in \mathfrak{T}$, ex. nach Bemerkung 3 ein $r > 0$ mit

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{B}_r(x) := \{\, y \in X \mid d(x,y) < r \,\} &\subseteq V \\
\{\, y \in A \mid d(x,y) < r \,\} &\subseteq V \cap A = U
\end{aligned}
$$

also ist U offen bzgl. $d|_{A \times A}$.

Wieso ist U offen bzgl. $d|_{A \times A}$?

Da $x \in U$ beliebig gewählt war gilt: $\mathfrak{T}|_A \subseteq \mathfrak{T}'$

19.) Topologische Gruppe und stetige Gruppenoperation

Definition 2

Sei G eine Mannigfaltigkeit und $(G, \circ)$ eine Gruppe.

a) G heißt **topologische Gruppe**, wenn die Abbildungen $\circ : G \times G \to G$ und $\iota : G \to G$ definiert durch

$$g \circ h := g \cdot h \text{ und } \iota(g) := g^{-1}$$

stetig sind.

b) Ist G eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so heißt G **Lie-Gruppe**, wenn $(G, \circ)$ und (G, ι) differenzierbar sind.

Definition 3

Sei G eine Gruppe, X ein topologischer Raum und $\circ : G \times X \to X$ eine Gruppenoperation.

a) G **operiert durch Homöomorphismen**, wenn für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$m_g : X \to X, x \mapsto g \circ x$$

ein Homöomorphismus ist.

b) Ist G eine topologische Gruppe, so heißt die Gruppenoperation $\circ$ **stetig**, wenn $\circ : G \times X \to X$ stetig ist.

Wenn G eine topologische Gruppe ist, dann ist $\circ$ doch auf jeden Fall stetig! Was soll die Definition? Des Weiteren verstehe ich $g \circ h := g \cdot h$ nicht. Was ist $\cdot$?

22.) MF-Beispiel

$\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{ 0 \})/_\sim = S^n/_\sim$ und $\mathcal{P}^n(\mathbb{C})$ sind Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. $2n$, da gilt:

Sei $U_i := \{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathcal{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0 \}$ $\forall i \in 0, \dots, n$. Dann ist $\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^n U_i$ und die Abbildung

$$\begin{aligned} U_i &\to \mathbb{R}^n \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \cancel{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ (y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_n) &\leftarrow\!\shortmid (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Was wird im Folgenden gemacht?

Die U_i mit $i = 0, \dots, n$ bilden einen n-dimensionalen Atlas:

$$\begin{aligned} x = (1:0:0) \in U_0 &\to \mathbb{R}^2 & x &\mapsto (0,0) \\ y = (0:1:1) \in U_2 &\to \mathbb{R}^2 & y &\mapsto (0,1) \end{aligned}$$

Umgebung: $\mathfrak{B}_1(0,1) \to \{ (1:u:v) \mid \|(u,v)\| < 1 \} = V_1$
Umgebung: $\mathfrak{B}_1(0,1) \to \left\{ (w:z:1) \;\middle|\; w^2 + z^2 < 1 \right\} = V_2$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$?

$(a:b:c) \in V_1 \cap V_2$
$\Rightarrow a \neq 0$ und $(\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 < 1 \Rightarrow \frac{c}{a} < 1$
$\Rightarrow c \neq 0$ und $(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 < 1 \Rightarrow \frac{a}{c} < 1$
$\Rightarrow$ Widerspruch

23) Hyperbolische Geraden erfüllen 3.ii

Bemerkung 1 (Eigenschaften der hyperbolischen Geraden)
Die hyperbolischen Geraden erfüllen das Anordnungsaxiom 3 ii

Beweis: Sei $g \in G_1 \dot\cup G_2$ eine hyperbolische Gerade.
Fall 1: $g = \{ z \in \mathbb{H} \mid |z - m| = r \} \in G_1$
Dann gilt:

$$\mathbb{H} = \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid |z - m| < r \}}_{=:H_1 \text{ (Kreisinneres)}} \dot\cup \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid |z - m| < r \}}_{=:H_2 \text{ (Kreisäußeres)}}$$

Da $r > 0$ ist H_1 nicht leer, da $r \in \mathbb{R}$ ist H_2 nicht leer.

Zu zeigen: $\forall A \in H_i,\ B \in H_j$ mit $i, j \in \{ 1, 2 \}$ gilt: $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$
„$\Leftarrow$“: Da $d_{\mathbb{H}}$ stetig ist, folgt diese Richtung direkt. Alle Punkte in H_1 haben einen Abstand von m der kleiner ist als r und alle Punkte in H_2 haben einen Abstand von m der größer ist als r. Da man jede Strecke von A nach B insbesondere auch als stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ auffassen kann, greift der Zwischenwertsatz $\Rightarrow \overline{AB} \cap g \neq \emptyset$

„$\Rightarrow$“:

TODO

Fall 2: $g = \{ z \in \mathbb{H} \mid \Re z = x \} \in G_2$
Die disjunkte Zerlegung ist:

$$\mathbb{H} = \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) < x \}}_{=:H_1 \text{ (Links)}} \dot\cup \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) > x \}}_{=:H_2 \text{ (Rechts)}}$$

Zu zeigen: $\forall A \in H_i,\ B \in H_j$ mit $i, j \in \{ 1, 2 \}$ gilt: $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$
„$\Leftarrow$“: Wie zuvor mit dem Zwischenwertsatz.

„$\Rightarrow$“:

TODO

25.) Fragen

1. Kapitel II:
   a) Frage 7: Anschaulich ist mir klar, warum durch Verkleben gegenüberliegernder Seiten ein Torus entsteht. Was wird hier erwartet?
2. Kapitel III
   a) Deformationsretrakt: Das hatten wir nicht in der Vorlesung, oder? Ich meine mich zwar an das Wort zu erinnern (aus einem Übungsblatt? Einem Tutorium?) Könntest du bitte nochmals erklären was das ist? Das ist zwar auf Blatt 7 und 8 vorgekommen, aber sonst nie.
   b) Damit verbunden: Was genau ist eine Ëinbettung"?
   c) Was bedeutet der Pfeil: $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ Einbettung der Kreislinie in die Ebene

d) Was ist eine Inklusionsabbildung?

e) Was ist ein Homotopietyp? (Ist das eventuell die Anzahl der Homotopieklassen?)

f) Frage 4: Was ist eine Rose?

g) Frage 5: Wieso ist $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine Lie-Gruppe?