Aufgabe 1

Teilaufgabe a)

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe b)

Gesucht: $\det(A)$

Sei $P \cdot L = L \cdot R$, die gewohnte LR-Zerlegung.

Dann gilt:

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(R) / \det(P)$$

$\det(L) = 1$, da alle Diagonalelemente 1 sind und es sich um eine untere Dreiecksmatrix handelt.

$\det(R) = r_{11} \cdot \ldots \cdot r_{nn}$ da es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt.

$\det(P) = 1$ oder -1

Das Verfahren ist also:

1. Berechne Restmatrix R mit dem Gaußverfahren.
2. Multipliziere die Diagonalelemente von R
3. falls die Anzahl an Zeilenvertauschungen ungerade ist negiere das Produkt aus 2 (eine Zeilenvertauschung verändert lediglich das Vorzeichen und P ist durch Zeilenvertauschungen aus der Einheitsmatrix hervorgegangen)

Aufgabe 2

Teilaufgabe a)

Formel: $y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} y_j \cdot l_{ij}}{l_{ii}}$

Anmerkung: l_{ii} kann nicht 0 sein, da L dann nicht mehr invertierbar wäre.

Algorithmus:

Algorithm 1 TODO

```
for i = 1 to i = n do
    sum ← 0
    for j = 1 to j = i − 1 do
        sum ← sum + y_i · l_ij
    end for
    y_i ← (b_i − sum) / l_ii
end for
```

(b)

Algorithm 2 Löse ein LGS $Ax = b$

```
Require: Matrix A, Vektor b
  procedure LoeseLGS(A, b)
    P, L, R ← LRZer(A)
    b* ← P · b
    c ← VorSub(L, b*)
    x ← RueckSub(R, c)
    return x
  end procedure
```

Teilaufgabe c)

Aufwand:

- Vorwärts-/Rückwärtssubstitution: jeweils $\frac{1}{2} \cdot n^2$
- LR-Zerlegung: $\frac{1}{3}n^3$
- gesamt: $\frac{1}{3}n^3 + n^2$

Aufgabe 3

Teilaufgabe a)

$$L_0(x) = -\frac{1}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x) \tag{1}$$
$$L_1(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 - 2x^2 - x + 2) \tag{2}$$
$$L_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^3 - x^2 - 2x) \tag{3}$$
$$L_3(x) = \frac{1}{6} \cdot (x^3 - x) \tag{4}$$

Damit ergibt sich:

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \tag{5}$$

Teilaufgabe b)

Zunächst die dividierten Differenzen berechnen:

$$f[x_0] = 7, \qquad f[x_1] = 1, \qquad f[x_2] = -1, \qquad f[x_3] = 7 \tag{6}$$
$$f[x_0, x_1] = -6, \qquad f[x_1, x_2] = -2, \qquad f[x_2, x_3] = 8 \tag{7}$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = 2, \qquad f[x_1, x_2, x_3] = 5 \tag{8}$$
$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1 \tag{9}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$p(x) = 7 - (x+1) \cdot 6 + (x+1) \cdot x \cdot 2 + (x+1) \cdot x \cdot (x-1) \tag{10}$$

Aufgabe 4

Teilaufgabe a)

1. Ordnung 3 kann durch geschickte Gewichtswahl erzwungen werden.
2. Ordnung 4 ist automatisch gegeben, da die QF symmetrisch sein soll.
3. Aufgrund der Symmetrie gilt Äquivalenz zwischen Ordnung 5 und 6. Denn eine hätte die QF Ordnung 5, so wäre wegen der Symmetrie Ordnung 6 direkt gegeben. Ordnung 6 wäre aber bei der Quadraturformel mit 3 Knoten das Maximum, was nur mit der Gauß-QF erreicht werden kann. Da aber $c_1 = 0$ gilt, kann es sich hier nicht um die Gauß-QF handeln. Wegen erwähnter Äquivalenz kann die QF auch nicht Ordnung 5 haben.

Da $c_1 = 0$ gilt, muss $c_3 = 0$ sein. Und dann muss $c_2 = \frac{1}{2}$ sein. Es müssen nun die Gewichte bestimmt werden um Ordnung 3 zu garantieren mit:

$$b_i = \int_0^1 L_i(x)\mathrm{d}x \tag{11}$$

$$b_1 = \frac{1}{6}, \tag{12}$$

$$b_2 = \frac{4}{6}, \tag{13}$$

$$b_4 = \frac{1}{6} \tag{14}$$

Teilaufgabe b)

Als erstes ist festzustellen, dass es sich hier um die Simpsonregel handelt und die QF

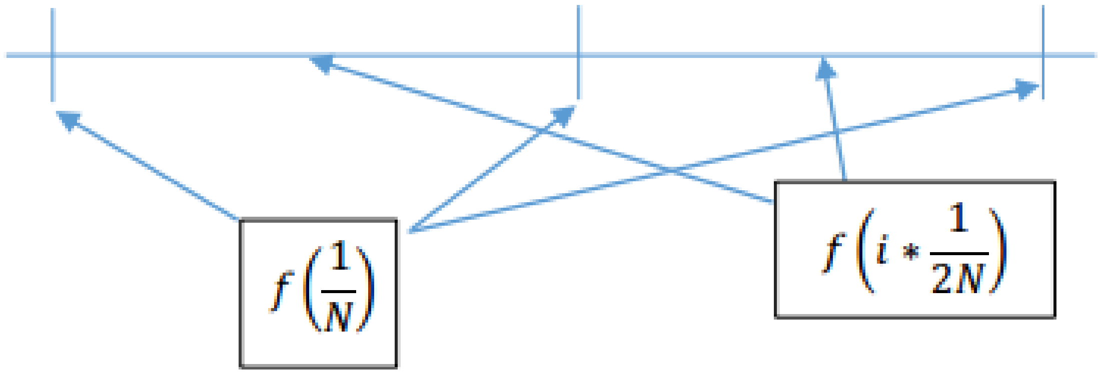
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(f(a) + 4\cdot f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \tag{15}$$

ist. Wenn diese nun auf N Intervalle aufgepflittet wird gilt folgendes:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left[f(a) + f(b) + 2\cdot\sum_{i=1}^{N-1} f(i\cdot\frac{1}{N}) + 4\cdot\sum_{i=1}^{N} f(i\cdot\frac{1}{2N})\right] \tag{16}$$

$\sum_{i=1}^{N-1} f(i\cdot\frac{1}{N})$ sind die Grenzknoten der Intervalle (deshalb werden sie doppelt gezählt). Von den Grenzknoten gibt es insgesamt $s-2$ Stück, da die tatsächlichen Integralgrenzen a und b nur einmal in die Berechnung mit einfließen.

$\sum_{i=1}^{N} f(i \cdot \frac{1}{2N})$ sind die jeweiligen mittleren Knoten der Intervalle. Davon gibt es $s-1$ Stück.



Teilaufgabe c)

TODO

Aufgabe 5

Es gibt unendlich viele symmetrische QF mit $0 = c_1 < c_2 < c_3$ und Ordnung ≥ 4. Die Knoten müssen nur folgende Eigenschaft erfüllen:

$$c_i = 1 - c_{s+1-i}$$

Die Gewichte sind durch Vorgabe der Knoten und der Bedingung, dass die QF die Ordnung von $s \geq 3$ erfüllen soll, nach VL bereits eindeutig bestimmt.

Anmerkung: Es gilt immer $c_2 = \frac{1}{2}$!