

Aufgabe 1

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ -41 \\ -15 \end{pmatrix}$$

LR-Zerlegung:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad (1)$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot \frac{1}{3} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{20}{3} & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad (3)$$

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{20}{3} & 6 \\ 0 & \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot \frac{1}{5} \quad (4)$$

$$L^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(4)} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{20}{3} & 6 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} =: R \quad (5)$$

Es gilt nun:

$$P := P^{(3)} \cdot P^{(1)} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$L^{(4)} \cdot P^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot P^{(1)} \cdot A = R \quad (9)$$

$$L^{-1} = L^{(4)} \cdot \hat{L}_1 \quad (10)$$

$$\hat{L}_1 = P^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot (P^{(3)})^{-1} \quad (11)$$

$$= P^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot P^{(3)} \quad (12)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$L = (L^{(4)} \cdot \hat{L}_1)^{-1} \quad (14)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Überprüfung mit Wolfram|Alpha.

Aufgabe 2

Zeige die Aussage für 2×2 Matrizen durch Gauß-en mit Spaltenpivotwahl.

Lösung

Behauptung:

Für alle tridiagonalen Matrizen gilt:

- (i) Die Gauß-Elimination erhält die tridiagonale Struktur
- (ii) $\rho_n(A) := \frac{\alpha_{\max}}{\max_{i,j} |a_{ij}|} \leq 2$

Beweis:

Teil 1: (i)

$$A = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ * & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & * & \\ & & & * & * \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[\cdot \frac{-a_{21}}{a_{11}} \right. \\ \leftarrow + \end{array} \quad (16)$$

Offensichtlich ändert diese Operation nur Zeile 2. a_{21} wird zu 0, a_{22} ändert sich irgendwie, alles andere bleibt unverändert. Die gesamte Matrix ist keine tridiagonale Matrix mehr, aber die um Submatrix in $R^{(n-1) \times (n-1)}$ ist noch eine.

Muss man zuvor Zeile 1 und 2 tauschen (andere Zeilen kommen nicht in Frage), so ist später die Stelle $a_{21} = 0$, a_{22} ändert sich wieder irgendwie und a_{23} ändert sich auch. Dies ändert aber nichts an der tridiagonalen Struktur der Submatrix.

Teil 2: (ii) für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Sei $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ beliebig.

O.B.d.A sei die Spaltenpivotwahl bereits durchgeführt, also $|a_{11}| \geq |a_{21}|$.

Nun folgt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot \frac{-a_{21}}{a_{11}} \\ + \end{array} \quad (17)$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Wegen $|a_{11}| \geq |a_{21}|$ gilt:

$$\left\| \frac{a_{21}}{a_{11}} \right\| \leq 1 \quad (19)$$

Also insbesondere

$$\underbrace{a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}}_{\leq \alpha_{\max}} \leq 2 \cdot \max_{i,j} |a_{ij}| \quad (20)$$

Damit ist Aussage (ii) für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gezeigt.

Teil 3: (ii) für allgemeinen Fall Aus Teil 2 folgt die Aussage auch direkt für größere Matrizen. Der worst case ist, wenn man beim Addieren einer Zeile auf eine andere mit $\max_{i,j} |a_{ij}|$ multiplizieren muss um das erste nicht-0-Element der Zeile zu entfernen und das zweite auch $\max_{i,j} |a_{ij}|$ ist. Dann muss man aber im nächsten schritt mit einem Faktor $\leq \frac{1}{2}$ multiplizieren, erhält also nicht einmal mehr $2 \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$.

Aufgabe 3

Teilaufgabe i

relativer Fehler:

$$\frac{\left| \frac{x}{y} - \frac{x \cdot (1 + \varepsilon_x)}{y \cdot (1 + \varepsilon_y)} \right|}{\left| \frac{x}{y} \right|} = \frac{\left| \frac{x(1 + \varepsilon_y) - x(1 + \varepsilon_x)}{y(1 + \varepsilon_y)} \right|}{\left| \frac{x}{y} \right|} \quad (21)$$

$$= \frac{\left| \frac{x(\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{y(1 + \varepsilon_y)} \right|}{\left| \frac{x}{y} \right|} \quad (22)$$

$$= \frac{\left| \varepsilon_y - \varepsilon_x \right|}{\left| 1 + \varepsilon_y \right|} \quad (23)$$

$$\leq \frac{|\varepsilon_y| + |\varepsilon_x|}{|1 + \varepsilon_y|} \leq \frac{2 \cdot \text{eps}}{|1 + \varepsilon_y|} \quad (24)$$

$$\approx 2 \cdot \text{eps} \quad (25)$$

Der letzte Ausdruck ist ungefähr gleich $2 \cdot \text{eps}$, da $1 + \varepsilon_y$ ungefähr gleich 1 ist.

Der relative Fehler kann sich also maximal verdoppeln.

Teilaufgabe ii

Die zweite Formel ist vorzuziehen, also $f(x) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, da es bei Subtraktion zweier annähernd gleich-großer Zahlen zur Stellenauslöschung kommt. Bei der ersten Formel, also $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, tritt genau dieses Problem auf: x und $\sqrt{x^2 - 1}$ sind für große x ungefähr gleich groß.

Bei der zweiten Formel tritt das Problem nicht auf: x ist positiv und $\sqrt{x^2 - 1}$ auch, also gibt es in dem Ausdruck keine Subtraktion zweier annähernd gleich-großer Zahlen.

Außerdem ändert sich $\ln(x)$ stärker, je näher x bei 0 ist. Es ist also auch wegen der Ungenauigkeit der Berechnung des \ln besser, weiter von 0 entfernt zu sein.

Aufgabe 4

TODO

- Klausur 3, Aufgabe 3 ist ähnlich
- Klausur 4, Aufgabe 3 ist ähnlich
- Klausur 5, Aufgabe 4 ist ähnlich
- Klausur 6, Aufgabe 3 ist ähnlich

Aufgabe 5

Aufgabe

Bestimme alle Quadraturformeln mit $s = 3$ und Knoten $0 = c_1 < c_2, c_3$ und Ordnung $p \geq 4$.

Schreiben Sie ein Programm in Pseudocode, welches zu vorgegebenem c_2 den Knoten c_3 und die Gewichte b_i möglichst effizient berechnet.

Wie viele symmetrische Quadraturformeln gibt es mit diesen Eigenschaften?

Lösung

Da $c_1 = 0$ kann es keine Gauß-Quadraturformel sein. Daher kann die Ordnung nicht $2 \cdot s = 6$ sein. Interessant sind also

- (A) Symmetrische Quadraturformeln der Ordnung 4
- (B) Unsymmetrische Quadraturformeln der Ordnung 4
- (C) Unsymmetrische Quadraturformeln der Ordnung 5

Die Simpson-Regel mit $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}$ und $c_3 = 1$ mit $b_1 = b_3 = \frac{1}{6}$ und $b_2 = \frac{4}{6}$ ist die einzige symmetrische Quadraturformel in (A).

Für (B) müssen die Ordnungsbedingungen gelten:

$$1/1 \stackrel{!}{=} b_1 + b_2 + b_3 \tag{26}$$

$$1/2 \stackrel{!}{=} b_2 \cdot c_2 + b_3 c_3 \tag{27}$$

$$1/3 \stackrel{!}{=} b_2 \cdot c_2^2 + b_3 c_3^2 \tag{28}$$

$$1/4 \stackrel{!}{=} b_2 \cdot c_2^3 + b_3 c_3^3 \tag{29}$$

$$\stackrel{27}{\Rightarrow} \frac{1/2 - b_3 c_3}{c_2} \stackrel{!}{=} b_2 \quad (30)$$

$$\stackrel{30 \text{ in } 28}{\Rightarrow} 1/3 \stackrel{!}{=} (1/2 - b_3 c_3) \cdot c_2 + b_3 c_3^2 \quad (31)$$

$$\Leftrightarrow 1/3 - 1/2 \cdot c_2 \stackrel{!}{=} b_3(-c_3 c_2 + c_3^2) \quad (32)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1/3 - 1/2 \cdot c_2}{c_3^2 - c_3 c_2} \stackrel{!}{=} b_3 \quad (33)$$

$$\stackrel{30 \text{ in } 29}{\Rightarrow} 1/4 \stackrel{!}{=} (1/2 - b_3 c_3) \cdot c_2^2 + b_3 c_3^3 \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow 1/4 - 1/2 c_2^2 \stackrel{!}{=} b_3(c_3^3 - c_3 \cdot c_2^2) \quad (35)$$

$$\stackrel{33 \text{ in } 35}{\Rightarrow} 1/4 - 1/2 c_2^2 \stackrel{!}{=} \frac{1/3 - 1/2 \cdot c_2}{c_3^2 - c_3 c_2} (c_3^3 - c_3 \cdot c_2^2) \quad (36)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - c_2^2 \right) = \frac{(1/3 - 1/2 \cdot c_2)(c_3^3 - c_3 \cdot c_2^2)}{c_3 - c_2} \quad (37)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - c_2^2 = (2/3 - c_2)(c_3 + c_2) \quad (38)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - c_2^2 = 2/3 c_3 + 2/3 c_2 - c_2 c_3 - c_2^2 \quad (39)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{2}{3} c_2 = 2/3 c_3 - c_2 c_3 \quad (40)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{2}{3} c_2 = c_3(2/3 - c_2) \quad (41)$$

$$\Leftrightarrow c_3 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3} c_2}{2/3 - c_2} = \frac{2c_2 - 3/2}{3c_2 - 2} \quad (42)$$

$$(43)$$

Für (C) muss zusätzlich gelten:

$$1/5 \stackrel{!}{=} b_2 \cdot c_2^4 + b_3 c_3^4 \quad (44)$$

TODO