Geometrie und Topologie

Siehe GitHub

22. Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript wird/wurde im Wintersemester 2013/2014 geschrieben. Es beinhaltet Vorlesungsnotizen von Studenten zur Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich.

Es darf jeder gerne Verbesserungen einbringen!

I. Topologische Grundbegriffe

I.1. Topologische Räume

Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathfrak{T})$ bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

(ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$

(iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen **offene Teilmengen** von X.

Beispiele 1

1) $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik.
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Leftrightarrow$ für jedes $x \in U$ gibt es $r > 0$, sodass $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r \} \subseteq U$

2) Allgemeiner: (X, d) metrischer Raum

3) X Menge, $\mathfrak{T} = \{ \emptyset, X \}$ heißt „triviale Menge“

4) X Menge, $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$ heißt „diskrete Topologie“

5) $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset \}$ heißt „Zariski-Topologie“
Beobachtung: $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X]$, sodass $\mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$

6) $X := \mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_Z = \{U \subseteq \mathbb{R}^n | \text{Es gibt Polynome } f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \text{ sodass}$
$\mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \ldots, f_r)\}$

7) $X = \{ 0, 1 \}, \mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0 \} \}$
abgeschlossene Mengen: $\emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 1 \}$

Definition 2

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x, wenn es ein $U_0 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U$.

Definition 3

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

a) $M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \}$ heißt **Inneres** oder **offener Kern** von M.

b) $\overline{M} := \bigcup_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von M.

c) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von M.

d) M heißt **dicht** in X, wenn $\overline{M} = X$ ist.

Stichwortverzeichnis