Analysis II

Die Mitarbeiter von mitschriebwiki.nomeata.de und GitHub

24. September 2012

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Über dieses Skriptum

Dies ist ein erweiterter Mitschrieb der Vorlesung „Analysis II“ von Herrn Schmoeger im Sommersemester 2005 (bis einschließlich §14) und im Sommersemester 2010 (ab §15) an der Universität Karlsruhe (KIT). Die Mitschriebe der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Herrn Schmoeger hier veröffentlicht, Herr Schmoeger ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

Wer

Gestartet wurde das Projekt von Joachim Breitner. Beteiligt am Mitschrieb (von 2005) sind außer Joachim noch Pascal Maillard, Wenzel Jakob und andere. Beteiligt am Mitschrieb (von 2010) sind Rebecca Schwerdt, Philipp Ost und Manuel Kaiser.

Im September 2012 wurde das Skript mit der Revisionsnummer 7255 von mitschriebwiki auf GitHub hochgeladen.

Wo

Alle Kapitel inklusive LaTeX-Quellen können unter mitschriebwiki.nomeata.de abgerufen werden. Dort ist ein Wiki eingerichtet und von Joachim Breitner um die LaTeX-Funktionen erweitert. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über Subversion möglich.

Oder man geht auf github, erstellt einen Fork und kann direkt Änderungen umsetzen.

1. Der Raum $\mathbb{R}^n$

Sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ist mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum.
$e_1 := (1, 0, \dots, 0),\ e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0),\ \dots,\ e_n := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Definition
Seien $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

(1) $x \cdot y := xy := x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ heißt das **Skalar-** oder **Innenprodukt** von x und y.

(2) $\|x\| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ heißt die **Norm** oder **Länge** von x.

(3) $\|x - y\|$ heißt der **Abstand** von x und y.

Beispiele:
(1) $\|e_j\| = 1\ (j = 1, \dots, n)$

(2) $n = 3 : \|(1, 2, 3)\| = (1 + 4 + 9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14}$

Beachte:

(1) $x \cdot y \in \mathbb{R}$

(2) $\|x\|^2 = x \cdot x$

Satz 1.1 (Rechenregeln zur Norm)
Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n)$

(1) $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z),\ x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz)$

(2) $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \iff x = 0$

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

(4) $|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$ **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** (**CSU**)

(5) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(6) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

(7) $|x_j| \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|\ (j = 1, \dots, n)$

Beweis
(1) , (2), (3) nachrechnen.

(6) Übung.

(4) O.B.d.A: $y \neq 0$ also $\|y\| > 0$. $a := x \cdot x = \|x\|^2$, $b := xy$, $c := \|y\|^2 = y \cdot y$, $\alpha := \frac{b}{c}$. $0 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - \alpha y_j)^2 = \sum_{j=1}^n (x_j^2 - 2\alpha x_j y_j + \alpha^2 y_j^2) = a - 2\alpha b + \alpha^2 c = a - 2\frac{b}{c} b + \frac{b^2}{c^2} c = a - \frac{b^2}{c} \implies 0 \leq ac - b^2 \implies b^2 \leq ac \implies (xy)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

(5) $\|x+y\|^2 = (x+y)(x+y) \overset{(1)}{=} x \cdot x + 2xy + y \cdot y = \|x\|^2 + 2xy + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|xy| + \|y\|^2 \overset{(4)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

(7) $|x_j|^2 = x_j^2 \leq x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \|x\|^2 \implies$ 1. Ungleichung; $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \implies \|x\| = \|x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n\| \overset{(5)}{\leq} \|x_1 e_1\| + \ldots + \|x_n e_n\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$ ■

Seien $p, q, l \in \mathbb{N}$. Es sei A eine reelle $p{\times}q$-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pq} \end{pmatrix} \qquad \|A\| := \left(\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \alpha_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ \textbf{Norm} von A}$$

Sei B eine reelle $q{\times}l$-Matrix ($\implies AB$ existiert). **Übung**: $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Sei $x = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$. $Ax := A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$ (**Matrix-Vektorprodukt**).

Es folgt:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

Definition
Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $A, U \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) $U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$ heißt δ-Umgebung von x_0 oder **offene Kugel** um x_0 mit Radius δ.

(2) U ist eine **Umgebung** von $x_0 :\iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq U$.

(3) A heißt **beschränkt** $:\iff \exists c \geq 0 : \|a\| \leq c \forall a \in A$.

(4) $x_0 \in A$ heißt ein **innerer Punkt** von A $:\iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A$.
$A^\circ := \{x \in A : x$ ist innerer Punkt von $A\}$ heißt das **Innere** von A. Klar: $A^\circ \subseteq A$.

(5) A heißt offen $:\iff A = A^\circ$. Zur Übung: A° ist offen.

Beispiele:

(1) offene Kugeln sind offen, $\mathbb{R}^n$ ist offen, $\emptyset$ ist offen.

(2) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$, $A^\circ = U_\delta(x_0)$

(3) $n = 2$: $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : x_2 = x_1^2\}$, $A^\circ = \emptyset$

Definition
$A \subseteq \mathbb{R}^n$

(1) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von $A :\iff \forall \delta > 0 : (U_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$.
$\mathscr{H}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : x$ ist Häufungspunkt von $A\}$.

(2) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Berührungspunkt** (BP) von $A :\iff \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset$.
$\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n : x$ ist ein Berührungspunkt von $A\}$ heißt der **Abschluss** von A.
Klar: $A \subseteq \bar{A}$. Zur Übung: $\bar{A} = A \cup \mathscr{H}(A)$.

(3) A heißt **abgeschlossen** $:\iff A = \bar{A}$. Zur Übung: $\bar{A}$ ist abgeschlossen.

(4) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Randpunkt** von $A :\iff \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset$ und $U_\delta(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \backslash A) \neq \emptyset$. $\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : x$ ist ein Randpunkt von $A\}$ heißt der **Rand** von A. Zur Übung: $\partial A = \bar{A} \backslash A^\circ$.

Beispiele:

(1) $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, $\emptyset$ ist abgeschlossen;
$\bar{A} = \overline{U_\delta(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$ (**abgeschlossene Kugel** um x_0 mit Radius δ)

(2) $\partial U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = \delta\} = \partial \overline{U_\delta(x_0)}$

(3) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_2 = x_1^2\}$. $A = \bar{A} = \partial A$

Satz 1.2 (Offene und abgeschlossene Mengen)

(1) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A ist abgeschlossen $:\iff \mathbb{R}^n \backslash A$ ist offen.

(2) Die Vereinigung offener Mengen ist offen.

(3) Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(4) Sind $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\implies \bigcap_{j=1}^n A_j$ ist offen

(5) Sind $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\implies \bigcup_{j=1}^n A_j$ ist abgeschlossen

Beispiel

$(n = 1)$. $A_t := (0, 1 + t)$ $(t > 0)$. Jedes A_t ist offen. $\bigcap_{t>0} A_t = (0, 1]$ ist nicht offen.

Beweis

(1) „ $\implies$ “: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Annahme: $\forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \nsubseteq \mathbb{R}^n \backslash A \implies \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset \implies x_0 \in \bar{A} \overset{\text{Vor.}}{=} A$, Widerspruch
„ $\impliedby$ “: Annahme: $\subset \bar{A} \implies \exists x_0 \in \bar{A} : x_0 \notin A$; also $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Voraussetzung $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash A \implies U_\delta(x_0) \cap A = \emptyset \implies x_0 \notin \bar{A}$, Widerspruch!

(2) Sei $(A_\lambda)_{\lambda \in M}$ eine Familie offener Mengen und $V := \bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda$. Sei $x_0 \in V \implies \exists \lambda_0 \in M : x_0 \in A_{\lambda_0}$. A_{λ_0} offen $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A_{\lambda_0} \subseteq V$

(3) folgt aus (1) und (2) (Komplemente!)

(4) $D := \bigcap_{j=1}^m A_j$. Sei $x_0 \in D$. $\forall j \in \{1, \ldots, m\} : x_0 \in A_j$, also eixistiert $\delta_j > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A_j$. $\delta := \min\{\delta_j, \ldots, \delta_m\} \implies U_\delta(x_0) \subseteq D$

(5) folgt aus (1) und (4) ■

2. Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Sei $(a^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, also $(a^{(k)}) = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots)$ mit $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$. Die Begriffe **Teilfolge** und **Umordnung** definiert man wie in Analysis I. $(a^{(k)})$ heißt beschränkt $:\iff \exists c \geq 0 : \|a^{(k)}\| \leq c \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Definition (Grenzwert und Beschränktheit)
$(a^{(k)})$ heißt **konvergent** $:\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \|a^{(k)} - a\| \to 0 \ (k \to \infty)$ ($\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|a^{(k)} - a\| < \varepsilon \ \forall k \geq k_0$). In diesem Fall heißt a der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von $(a^{(k)})$ und man schreibt: $a = \lim_{k\to\infty} a^{(k)}$ oder $a^{(k)} \to a \ (k \to \infty)$

Beispiel
$(n = 2)$: $a^{(k)} = (\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k^2})$ (Erinnerung: $\frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0); $a := (0, 1)$; $\|a^{(k)} - a\| = \|(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})\| = (\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4})^{\frac{1}{2}} \to 0 \implies a^{(k)} \to (0, 1)$

Satz 2.1 (Konvergenz)
Sei $(a^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$.

(1) Sei $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$ und $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann:

$$a^{(k)} \to a \ (k \to \infty) \iff a_1^{(k)} \to a_1, \dots, a_n^{(k)} \to a_n \ (k \to \infty)$$

(2) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

(3) Ist $(a^{(k)})$ konvergent $\implies$ $a^{(k)}$ ist beschränkt und jede Teilfolge und jede Umordnung von $(a^{(k)})$ konvergiert gegen $\lim a^{(k)}$.

(4) Sei $(b^{(k)})$ eine weitere Folge, $a, b \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gelte $a^{(k)} \to a$, $b^{(k)} \to b$ Dann:

$$\begin{aligned} \|a^{(k)}\| &\to \|a\| \\ a^{(k)} + b^{(k)} &\to a + b \\ \alpha a^{(k)} &\to \alpha a \\ a^{(k)} \cdot b^{(k)} &\to a \cdot b \end{aligned}$$

(5) **Bolzano-Weierstraß**: Ist $(a^{(k)})$ beschränkt, so enthält $(a^{(k)})$ eine konvergente Teilfolge.

(6) **Cauchy-Kriterium**: $(a^{(k)})$ konvergent $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|a^{(k)} - a^{(l)}\| < \varepsilon \ \forall k, l \geq k_0$

Beweis

(1) 1.1(7) $\Longrightarrow |a_j^{(k)} - a_j| \leq \|a^{(k)} - a\| \leq \sum_{i=1}^n |a_j^{(k)} - a_j| \Longrightarrow$ Behauptung.

(2) und

(3) wie in Analysis I.

(4) folgt aus (1)

(5) Sei $(a^{(k)})$ beschränkt. O.B.d.A: $n = 2$. Also $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)})$ 1.1(7) $\Longrightarrow |a_1^{(k)}|, |a_2^{(k)}| \leq \|a^{(k)}\| \; \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow (a_1^{(k)}, a_2^{(k)})$ sind beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Analysis 1 $\Longrightarrow (a_1^{(k)})$ enthält eine konvergente Teilfolge $(a_1^{(k_j)})$. $(a_2^{(k_j)})$ enthält eine konvergente Teilfolge$(a_2^{(k_{j_l})})$. Analysis 1 $\Longrightarrow (a_1^{(k_{j_l})})$ ist konvergent $\overset{(1)}{\Longrightarrow} (a^{(k_{j_l})})$ konvergiert.

(6) „ $\Longrightarrow$ “: wie in Analysis 1. „ $\Longleftarrow$ “: 1.1(7) $\Longrightarrow |a_j^{(k)} - a_j^{(l)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(l)}\| \; (j = 1, \ldots, n) \Longrightarrow$ jede Folge $(a_j^{(k)})$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also konvergent $\overset{(1)}{\Longrightarrow} (a^{(k)})$ konvergiert. ■

Satz 2.2 (Häufungswerte und konvergente Folgen)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$

(1) $x_0 \in \mathscr{H}(A) \iff \exists$ Folge $(x^{(k)})$ in $A \setminus \{x_0\}$ mit $x^{(k)} \to x_0$.

(2) $x_0 \in \bar{A} \iff \exists$ Folge $(x^{(k)})$ in A mit $x^{(k)} \to x_0$.

(3) A ist abgeschlossen $\iff$ der Grenzwert jeder konvergenten Folge in A gehört zu A.

(4) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

  (i) A ist beschränkt und abgeschlossen

  (ii) Jede Folge in A enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert zu A gehört.

  (iii) A ist kompakt

Beweis

(1) Wie in Analysis 1

(2) Fast wörtlich wie bei (1)

(4) Wörtlich wie in Analysis 1

(3) „ $\Longrightarrow$ “: Sei $(a^{(k)})$ eine konvergente Folge in A und $x_0 := \lim a^{(k)} \overset{(2)}{\Longrightarrow} x_0 \in \bar{A} \overset{\text{Vor.}}{=} A$.
„ $\Longleftarrow$ “: z.z: $\bar{A} \subseteq A$. Sei $x_0 \in \bar{A} \overset{(2)}{\Longrightarrow} x_0 \in A$. Also: $A = \bar{A}$. ■

Satz 2.3 (Überdeckungen)
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei abgeschlossen und beschränkt

(1) Ist $\varepsilon > 0 \implies \exists a^{(1)}, \dots, a^{(m)} \in A : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_\varepsilon(a^{(j)})$

(2) $\exists$ abzählbare Teilmenge B von $A : \bar{B} = A$.

(3) **Überdeckungssatz von Heine-Borel**: Ist $(G_\lambda)_{\lambda \in M}$ eine Familie offener Mengen mit $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in M} G_\lambda$, dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in M : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}$.

Beweis

(1) Sei $\varepsilon > 0$. Annahme: Die Behauptung ist falsch. Sei $a^{(1)} \in A$. Dann: $A \nsubseteq U_\varepsilon(a^{(1)}) \implies \exists a^{(2)} \in A : a^{(2)} \notin U_\varepsilon(a^{(1)}) \implies \|a^{(2)} - a^{(1)}\| \geq \varepsilon$. $A \nsubseteq U_\varepsilon(a^{(1)}) \cup U_\varepsilon(a^{(2)}) \implies \exists a^{(3)} \in A : \|a^{(3)} - a^{(2)}\| \geq \varepsilon$, $\|a^{(3)} - a^{(1)}\| \geq \varepsilon$ etc.. Wir erhalten so eine Folge $(a^{(k)})$ in A: $\|a^{(k)} - a^{(l)}\| \geq \varepsilon$ für $k \neq l$. 2.2(4) $\implies$ $(a^{(k)})$ enthält eine konvergente Teilfolge $\overset{2.1(6)}{\implies} \exists j_0 \in \mathbb{N} : \|a^{(k_j)} - a^{(k_l)}\| < \varepsilon \ \forall j, l \geq j_0$, Widerspruch!

(2) Sei $j \in \mathbb{N}$. $\varepsilon := \frac{1}{j}$. (1) $\implies \exists$ endl. Teilmenge B_j von A mit $(*)$ $A \subseteq \bigcup_{x \in B_j} U_{\frac{1}{j}}(x)$.
$B := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \implies B \subseteq A$ und B ist abzählbar. Dann: $\bar{B} \subseteq \bar{A} \overset{\text{Vor.}}{=} A$. Noch zu zeigen: $A \subseteq \bar{B}$. Sei $x_0 \in A$ und $\delta > 0$: zu zeigen: $U_\delta(x_0) \cap B \neq \emptyset$. Wähle $j \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{j} < \delta$ $(*) \implies \exists x \in B_j \subseteq B : x_0 \in U_{\frac{1}{j}}(x) \implies \|x_0 - x\| < \frac{1}{j} < \delta \implies x \in U_\delta(x_0) \implies x \in U_\delta(x_0) \cap B$.

(3) Teil 1: Behauptung: $\exists \varepsilon > 0 : \forall a \in A \ \exists \lambda \in M : U_\varepsilon(a) \subseteq G_\lambda$. Beweis: Annahme: Die Behauptung ist falsch. $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists a^{(k)} \in A : (**) U_{\frac{1}{k}}(a^{(k)}) \nsubseteq G_\lambda \ \forall \lambda \in M$. 2.2(4) $\implies (a^{(k)})$ enthält eine konvergente Teilfolge $(a^{(k_j)})$ und $x_0 := \lim_{j \to \infty} a^{k_j} \in A \implies \exists \lambda_0 \in M : x_0 \in G_{\lambda_0}$; G_{λ_0} offen $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq G_{\lambda_0}$. $a^{(k_j)} \to x_0$ $(j \to \infty) \implies \exists m_0 \in \mathbb{N} : a^{(m_0)} \in U_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ und $m_0 \geq \frac{2}{\delta}$. Sei $x \in U_{\frac{1}{m_0}}(a^{(m_0)}) \implies \|x - x_0\| = \|x - a^{(m_0)} + a^{(m_0)} - x_0\| \leq \|x - a^{(m_0)}\| + \|a^{(m_0)} - x_0\| \leq \frac{1}{m_0} + \frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \implies x \in U_\delta(x_0) \implies x \in G_{\lambda_0}$. Also: $U_{\frac{1}{m_0}}(a^{(m_0)}) \subseteq G_{\lambda_0}$, Widerspruch zu $(**)$!

Teil 2: Sei $\varepsilon > 0$ wie in Teil 1. (1) $\implies \exists a^{(1)}, \dots, a^{(m)} \in A : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_\varepsilon(a^{(j)})$. Teil 1 $\implies \exists \lambda_j \in M : U_\varepsilon(a^{(j)}) \subseteq G_{\lambda_j}$ $(j = 1, \dots, m) \implies A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}$ ■

3. Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit

Vereinbarung: Stets in dem Paragraphen: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine (**vektorwertige**) Funktion. Für Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ schreiben wir auch (x, y). Für Punkte $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ schreiben wir auch (x, y, z). Mit $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ hat f die Form $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$, wobei $f_j : D \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, m)$. Kurz: $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Beispiele:

(1) $n = 2, m = 3$. $f(x, y) = (x + y, xy, xe^y)$; $f_1(x, y) = x + y, f_2(x, y) = xy, f_3(x, y) = xe^y$.

(2) $n = 3, m = 1$. $f(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$

Definition
Sei $x_0 \in \mathscr{H}(D)$.

(1) Sei $y_0 \in \mathbb{R}^m$. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 :\iff$ für **jede** Folge $(x^{(k)})$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x^{(k)} \to x_0$ gilt: $f(x^{(k)}) \to y_0$. In diesem Fall schreibt man: $f(x) \to y_0 (x \to x_0)$.

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert $:\iff \quad \exists y_0 \in \mathbb{R}^m : \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

Beispiele:

(1) $f(x, y) = (x + y, xy, xe^y)$; $\lim\limits_{(x,y) \to (1,1)} f(x, y) = (2, 1, e)$, denn: ist $((x_k, y_n))$ eine Folge mit $(x_k, y_k) \to (1, 1) \overset{2.1}{\Longrightarrow} x_k \to 1, y_k \to 1 \Longrightarrow x_k + y_k \to 2, x_k y_k \to 1, x_k e^{y_k} \to e \overset{2.1}{\Longrightarrow} (x_k, y_k) \to (2, 1, e)$.

(2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{, falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{, falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$f(\frac{1}{k}, 0) = 0 \to 0$ $(k \to \infty), (\frac{1}{k}, 0) \to (0, 0), f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ $(k \to \infty), (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0, 0)$, d.h $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ existiert nicht! **Aber**: $\lim\limits_{x \to 0}(\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)) = 0 = \lim\limits_{y \to 0}(\lim\limits_{x \to 0} f(x, y))$.

Satz 3.1 (Grenzwerte vektorwertiger Funktionen)

(1) Ist $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $y_0 = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, so gilt: $f(x) \to y_0$ $(x \to x_0) \iff f_j(x) \to y_j$ $(x \to x_0)$ $(j = 1, \dots, m)$

(2) Die Aussagen des Satzes Ana I, 16.1 und die Aussagen (1) und (2) des Satzes Ana I, 16.2 gelten sinngemäß für Funktionen von mehreren Variablen.

Beweis

(1) folgt aus 2.1

(2) wie in Ana I ■

Definition (Stetigkeit vektorwertiger Funktionen)

(1) Sei $x_0 \in D$. f heißt **stetig** in x_0 gdw. für jede Folge $(x^{(k)})$ in D mit $(x^{(k)}) \to x_0$ gilt: $f(x^{(k)}) \to f(x_0)$. Wie in Ana I: Ist $x_0 \in D \cap \mathscr{H}(D)$, so gilt: f ist stetig in $x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(2) f heißt auf D stetig gdw. f in jedem $x \in D$ stetig ist. In diesem Fall schreibt man: $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$ $(C(D) = C(D, \mathbb{R}))$.

(3) f heißt auf D **gleichmäßig** (glm) stetig gdw. gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \; \forall x, y \in D : \|x - y\| < \delta$

(4) f heißt auf D **Lipschitzstetig** gdw. gilt:
$\exists L \geq 0 : \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \; \forall x, y \in D$.

Satz 3.2 (Stetigkeit vektorwertiger Funktionen)

(1) Sei $x_0 \in D$ und $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Dann ist f stetig in x_0 gdw. alle f_j stetig in x_0 sind. Entsprechendes gilt für „stetig auf D“, „glm stetig auf D“, „Lipschitzstetig auf D“.

(2) Die Aussagen des Satzes Ana I, 17.1 gelten sinngemäß für Funktionen von mehreren Variablen.

(3) Sei $x_0 \in D$. f ist stetig in x_0 gdw. zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 existiert mit $f(U \cap D) \subseteq V$.

(4) Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^m$, $f(D) \subseteq E$, $g : E \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion, f stetig in $x_0 \in D$ und g stetig in $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$ stetig in x_0.

Beweis

(1) folgt aus 2.1

(2) wie in Ana 1

(3) Übung

(4) wie in Ana 1 ■

Beispiele:

(1) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (D = \mathbb{R}^2)$

$f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) \implies f$ ist in $(0,0)$ <u>nicht</u> stetig.

(2) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{y}\sin(xy), & y \neq 0 \\ x, & y = 0 \end{cases}$

Für $y \neq 0 : |f(x,y) - f(0,0)| = \frac{1}{|y|}|\sin(xy)| \leq \frac{1}{|y|}|xy| = |x|$.

Also gilt: $|f(x,y)-f(0,0)| \leq |x| \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \implies f(x,y) \to f(0,0) \; ((x,y) \to (0,0)) \implies$ f ist stetig in $(0,0)$.

(3) Sei $\Phi \in C^1(\mathbb{R}),\ \Phi(0)=0,\ \Phi'(0)=2$ und $a \in \mathbb{R}$.

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\Phi(a(x^2+y^2))}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{1}{2}, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f stetig in $(0,0)$?

Fall 1: $a = 0$

$f(x,y) = 0 \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \implies f$ ist in $(0,0)$ nicht stetig.

Fall 2: $a \neq 0$

$r := x^2 + y^2$. $(x,y) \to (0,0) \iff \|(x,y)\| \to 0 \iff r \to 0$, Sei $(x,y) \neq (0,0)$. Dann gilt:

$f(x,y) = \frac{\Phi(ar)}{r} = \frac{\Phi(ar)-\Phi(0)}{r-0} = a\frac{\Phi(ar)-\Phi(0)}{ar-0} \overset{r \to 0}{\to} a\Phi'(0) = 2a$. Das heißt: $f(x,y) \to 2a \; ((x,y) \to (0,0))$.

Daher gilt: f ist stetig in $(0,0) \iff 2a = \frac{1}{2} \iff a = \frac{1}{4}$.

Definition (Beschränktheit einer Funktion)
$f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt **beschränkt** (auf D) gdw. $f(D)$ beschränkt ist ($\iff \exists c \geq 0 : \|f(x)\| \leq c \; \forall x \in D$).

Satz 3.3 (Funktionen auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen)
D sei beschränkt und abgeschlossen und es sei $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$.

(1) $f(D)$ ist beschränkt und abgeschlossen.

(2) f ist auf D gleichmäßig stetig.

(3) Ist f injektiv auf D, so gilt: $f^{-1} \in C(f(D), \mathbb{R}^n)$.

(4) Ist $m = 1$, so gilt: $\exists a, b \in D : f(a) \leq f(x) \leq f(b) \; \forall x \in D$.

Beweis
wie in Ana I. ■

Satz 3.4 (Fortsetzungssatz von Tietze)
Sei D abgeschlossen und $f \in C(D, \mathbb{R}^m) \implies \exists F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : F = f$ auf D.

Satz 3.5 (Lineare Funktionen und Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$)

(1) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und linear, so gilt: f ist Lipschitzstetig auf $\mathbb{R}^n$, insbesondere gilt: $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(2) Ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, so ist U abgeschlossen.

Beweis

(1) Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Es gibt eine $(m \times n)$-Matrix A mit $f(x) = Ax$. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|f(x) - f(y)\| = \|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\|$

(2) Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Es gibt einen UVR V von $\mathbb{R}^n$ mit: $\mathbb{R}^n = U \oplus V$. Definiere $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wie folgt: zu $x \in \mathbb{R}^n$ existieren eindeutig bestimmte $u \in U,\ v \in V$ mit: $x = u + v;\ P(x) := u$.

Nachrechnen: P ist linear.

$P(\mathbb{R}^n) = U$ (Kern $P = V,\ P^2 = P$). Sei $(u^{(k)})$ eine konvergente Folge in U und $x_0 := \lim u^{(k)}$, z.z.: $x_0 \in U$.

Aus (1) folgt: P ist stetig $\implies P(u^{(k)}) \to P(x_0) \implies x_0 = \lim u^{(k)} = \lim P(u^{(k)}) = P(x_0) \in P(\mathbb{R}^n) = U$. ■

Definition (Abstand eines Vektor zu einer Menge)

Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n$. $d(x, A) := \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$ heißt der **Abstand** von x und A.

Klar: $d(a, A) = 0\ \forall a \in A$.

Satz 3.6 (Eigenschaften des Abstands zwischen Vektor und Menge)

(1) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

(2) $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

Beweis

(1) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Sei $a \in A$. $d(x, A) \leq \|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$
$\implies d(x, A) - \|x - y\| \leq \|y - a\|\ \forall a \in A$
$\implies d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, A)$
$\implies d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$

Genauso: $d(y, A) - d(x, A) \leq \|y - x\| = \|x - y\| \implies$ Beh.

(2) Der Beweis erfolgt duch Implikation in beiden Richtungen:

„$\Longleftarrow$“: Sei $x \in \overline{A} \overset{2.2}{\implies} \exists$ Folge $(a^{(k)})$ in $A : a^{(k)} \to x \overset{(1)}{\implies} d(a^{(k)}, A) \to d(x, A) \implies d(x, A) = 0$.

„$\implies$“: Sei $d(x, A) = 0$. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists a^{(k)} \in A : \|a^{(k)} - x\| < \frac{1}{k} \implies a^{(k)} \to x \overset{2.2}{\implies} x \in \overline{A}$. ■

4. Partielle Ableitungen

Stets in diesem Paragraphen: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D sei offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ (fest).

Die Gerade durch x_0 mit der Richtung e_j ist gegeben durch folgende Menge: $\{x_0 + te_j : t \in \mathbb{R}\}$. D offen $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$. $\|x_0 + te_j - x_0\| = \|te_j\| = |t| \implies x_0 + e_j \in D$ für $t \in (-\delta, \delta)$. $g(t) := f(x_0 + te_j)$ $(t \in (-\delta, \delta))$ Es ist $g(t) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{j-1}^{(0)}, x_j^{(0)} + t, x_{j+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

Definition
f heißt in x_0 **partiell differenzierbar** nach x_j $:\iff$ es exisitert der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t}$$

und ist $\in \mathbb{R}$. In diesem Fall heißt obiger Grenzwert die **partielle Ableitung von** f **in** x_0 nach x_j und man schreibt für diesen Grenzwert:

$$f_{x_j}(x_0) \text{ oder } \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

Im Falle $n = 2$ oder $n = 3$ schreibt man f_x, f_y, f_z bzw. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$

Beispiele:

(1) $f(x, y, z) = xy + z^2 + e^{x+y}$; $f_x(x, y, z) = y + e^{x+y} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$. $f_x(1, 1, 2) = 1 + e^2$. $f_y(x, y, z) = x + e^{x+y}$. $f_z(x, y, z) = 2z = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$.

(2) $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Sei $x \neq 0$: $f_{x_j}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} 2x_j = \frac{x_j}{\|x\|}$

Sei $x = 0$: $\frac{f(t, 0, \dots, 0) - f(0, 0, \dots, 0)}{t} = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \implies f$ ist in $(0, \dots, 0)$ nicht partiell differenzierbar nach x_1. Analog: f ist in $(0, \dots, 0)$ nicht partiell differenzierbar nach $x_2, \dots, x_n$

(3) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \to 0$ $(t \to 0)$ $\implies f$ ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar nach x und $f_x(0, 0) = 0$. Analog: f ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar nach y und $f_y(0, 0) = 0$. Aber: f ist in $(0, 0)$ nicht stetig.

Definition

(1) f heißt in x_0 **partiell differenzierbar** $:\iff f$ ist in x_0 partiell differenzierbar nach allen Variablen $x_1, \dots, x_n$. In diesem Fall heißt $\operatorname{grad} f(x_0) := \nabla f(x_0) := (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$ der **Gradient** von f in x_0.

(2) f ist auf D **partiell differenzierbar** nach x_j oder f_{x_j} ist auf D vorhanden : $\Longleftrightarrow$ f ist in jedem $x \in D$ partiell differenzierbar nach x_j. In diesem Fall wird durch $x \mapsto f_{x_j}(x)$ eine Funktion $f_{x_j} : D \to \mathbb{R}$ definiert die **partielle Ableitung** von f auf D nach x_j.

(3) f heißt **partiell differenzierbar** auf D : $\Longleftrightarrow$ $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ sind auf D vorhanden.

(4) f heißt auf D **stetig partiell differenzierbar** : $\Longleftrightarrow$ f ist auf D partiell differenzierbar und $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ sind auf D stetig. In diesem Fall schreibt man $f \in C^1(D, \mathbb{R})$.

Beispiele:

(1) Sei f wie in obigem Beispiel (3). f ist in $(0,0)$ partiell differenzierbar und $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$

(2) Sei f wie in obigem Beispiel (2). f ist auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ partiell differenzierbar und $\operatorname{grad} f(x) = (\frac{x_1}{\|x_n\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|}) = \frac{1}{\|x\|} x \ (x \neq 0)$

Definition

Seien $j, k \in \{1, \dots, n\}$ und f_{x_j} sei auf D vorhanden. Ist f_{x_j} in $x_0 \in D$ partiell differenzierbar nach x_k, so heißt

$$f_{x_j x_k}(x_0) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) := \left(f_{x_j}\right)_{x_k}(x_0)$$

die **partielle Ableitung zweiter Ordnung** von f in x_0 nach x_j und x_k. Ist $k = j$, so schreibt man:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x_0)$$

Entsprechend definiert man partielle Ableitungen höherer Ordnung (soweit vorhanden).

Schreibweisen: $f_{xxyzz} = \dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y \partial z^2}$, vergleiche: $\dfrac{\partial^{180} f}{\partial x^{179} \partial y}$

Beispiele:

(1) $f(x,y) = xy + y^2$, $f_x(x,y) = y$, $f_{xx} = 0$, $f_y = x + 2y$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 1$, $f_{yx} = 1$.

(2) $f(x,y,z) = xy + z^2 e^x$, $f_x = y + z^2 e^x$, $f_{xy} = 1$, $f_{xyz} = 0$. $f_z = 2ze^x$, $f_{zy} = 0$, $f_{zyx} = 0$.

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Übungsblatt: $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ existieren, aber $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

Definition

Sei $m \in \mathbb{N}$. f heißt auf D **m-mal stetig partiell differenzierbar** : $\Longleftrightarrow$ alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq m$ sind auf D vorhanden und auf D stetig. In diesem Fall schreibt man: $f \in C^m(D, \mathbb{R})$

$$C^0(D, \mathbb{R}) := C(D, \mathbb{R}), \qquad C^\infty(D, \mathbb{R}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(D, \mathbb{R})$$

Satz 4.1 (Satz von Schwarz)

Es sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ und $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Dann: $f_{x_j x_k}(x_0) = f_{x_k x_j}(x_0)$

Satz 4.2 (Folgerung)
Ist $f \in C^m(D, \mathbb{R})$, so sind die partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq m$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentation.

Beweis
O.B.d.A: $n = 2$ und $x_0 = (0, 0)$. Zu zeigen: $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$. D offen $\implies$ $\exists \delta > 0$: $U_\delta(0, 0) \subseteq D$. Sei $(x, y) \in U_\delta(0, 0)$ und $x \neq 0 \neq y$.

$$\nabla := f(x, y) - f(x, 0) - (f(0, y) - f(0, 0)), \quad \varphi(t) := f(t, y) - f(t, 0)$$

für t zwischen 0 und x. φ ist differenzierbar und $\varphi'(t) = f_x(t, y) - f_x(t, 0)$. $\varphi(x) - \varphi(0) = \nabla$. MWS, Analysis I $\implies$ $\exists \xi = \xi(x, y)$ zwischen 0 und x: $\nabla = x\varphi'(\xi) = x(f_x(\xi, y) - f_x(\xi, 0))$. $g(s) := f_x(\xi, s)$ für s zwischen 0 und y; g ist differenzierbar und $g'(s) = f_{xy}(\xi, s)$. Es ist $\nabla = x(g(y) - g(0)) \overset{\text{MWS}}{=} xyg'(\eta)$, $\eta = \eta(x, y)$ zwischen 0 und y. $\implies$ $\nabla = xyf_{xy}(\xi, \eta)$. (1)
$\psi(t) := f(x, t) - f(0, t)$, t zwischen 0 und y. $\psi'(t) = f_y(x, t) - f_y(0, t)$. $\nabla = \psi(y) - \psi(0)$. Analog: $\exists \bar{\eta} = \bar{\eta}(x, y)$ und $\bar{\xi} = \bar{\xi}(x, y)$, $\bar{\eta}$ zwischen 0 und y, $\bar{\xi}$ zwischen 0 und x. $\nabla = xyf_{yx}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$. (2)
Aus (1), (2) und $xy \neq 0$ folgt $f_{xy}(\xi, \eta) = f_{yx}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$. $(x, y) \to (0, 0)$ $\implies$ $\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta} \to 0$ $\xRightarrow{f \in C^2}$ $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ ■

5. Differentiation

Vereinbarung: Stets in dem Paragraphen: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, also $f = (f_1, \ldots, f_m)$

Definition

(1) Sei $k \in \mathbb{N}$. $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m) :\iff f_j \in C^k(D, \mathbb{R})$ $(j = 1, \ldots, m)$

(2) Sei $x_0 \in D$. f heißt **partiell differenzierbar** in $x_0 :\iff$ jedes f_j ist in x_0 partiell differenzierbar. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) := \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} := J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

die **Jacobi-** oder **Funktionalmatrix** von f in x_0.

Beachte:

(1) $J_f(x_0)$ ist eine $(m \times n)$-Matrix.

(2) Ist $m = 1$ folgt $J_f(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0)$.

Erinnerung: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in I$. φ ist in x_0 differenzierbar

$$\overset{\text{ANA 1}}{\iff} \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = a \iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - ah}{h} = 0 \iff \exists a \in \mathbb{R} : \underset{h}{\mathrm{l}}$$

Definition

(1) Sei $x_0 \in D$. f heißt **differenzierbar** (db) in $x_0 :\iff \exists (m \times n)$-Matrix A, sodass gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|} = 0 \qquad (*)$$

(2) f heißt differenzierbar auf D $:\iff$ f ist in jedem $x \in D$ differenzierbar.

Bemerkungen:

(1) f ist differenzierbar in $x_0 \iff \exists (m \times n)$-Matrix A:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

(2) Ist $m = 1$, so gilt: f ist differenzierbar in x_0

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{\|h\|} = 0 \qquad (**)$$

(3) Aus 2.1 folgt: f ist differenzierbar in $x_0 \iff$ jedes f_j ist differenzierbar in x_0.

Satz 5.1 (Differenzierbarkeit und Stetigkeit)
f sei in $x_0 \in D$ differenzierbar

(1) f ist in x_0 stetig

(2) f ist in x_0 partiell differenzierbar und die Matrix A in $(*)$ ist eindeutig bestimmt: $A = J_f(x_0)$. $f'(x_0) := A = J_f(x_0)$ (**Ableitung** von f in x_0).

(3) Ist $m = 1$, so ist $f'(x_0) = a$ (aus $(**)$), also $f'(x_0) = \operatorname{grad}(f(x_0))$

Beweis
Sei A wie in $(*)$, $A = (a_{jk})$, $\varrho(h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{\|h\|}$, also: $\varrho(h) \to 0$ $(h \to 0)$. Sei $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m)$. 2.1 $\implies \varrho_j(h) \to 0$ $(h \to 0)$ $(j = 1, \dots, m)$

(1) $f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{Ah}_{\overset{3.5}{\to}0} + \underbrace{\|h\|\varrho(h)}_{\to 0\ (h\to 0)} \to f(x_0)$ $(h \to 0)$

(2) Sei $j \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Zu zeigen: f_j ist partiell differenzierbar und $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) = a_{jk}$. $\varrho_j(h) = \frac{1}{\|h\|}(f_j(x_0+h) - f_j(x_0) - (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \cdot h) \to 0$ $(h \to 0)$. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $h = te_k \implies \varrho(h) = \frac{1}{|t|}(f(x_0+te_k) - a_{jk}t) \to 0$ $(t \to 0) \implies \left|\frac{f(x_0+te_k)-f(x_0)}{t} - a_{jk}\right| \to 0$ $(t \to 0) \implies f_j$ ist in x_0 partiell differenzierbar und $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) = a_{jk}$. ■

Beispiele:

(1)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Bekannt: f ist in $(0,0)$ **nicht** stetig, aber partiell differenzierbar und $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$
5.1 $\implies f$ ist in $(0,0)$ **nicht** differenzierbar.

(2)

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\underbrace{\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{beschränkt}} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$: $|f(x,y)| = (x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq x^2+y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 \implies f$ ist in $(0,0)$ stetig. $\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}t^2\sin\frac{1}{|t|} = t\sin\frac{1}{|t|} \to 0$ $(t \to 0) \implies f$ ist in $(0,0)$ partiell differenzierbar nach x und $f_x(0,0) = 0$. Analog: f ist in $(0,0)$ partiell differenzierbar nach y und $f_y(0,0) = 0$. $\varrho(h) = \frac{1}{\|h\|}f(h) \overset{h=(h_1,h_2)}{=} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}(h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} = \sqrt{h_1^2+h_2^2}\underbrace{\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{\text{beschränkt}} \to 0$ $(h \to 0) \implies f$ ist differenzierbar in $(0,0)$ und $f'(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$

(3)
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{, falls}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Übung: f ist in $(0,0)$ stetig.

$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}\frac{t^3}{t^2} = 1 \to 1$ $(t \to 0)$. $\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \to 0$ $(t \to 0)$.

$\implies f$ ist in $(0,0)$ partiell db und $\operatorname{grad} f(0,0) = (1,0)$.

Für $h = (h_1, h_2) \neq (0,0) : \rho(h) = \frac{1}{\|h\|}(f(h) - f(0,0) - \operatorname{grad} f(0,0) \cdot h) = \frac{1}{\|h\|}(\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1) = \frac{1}{\|h\|}\frac{-h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2} = \frac{-h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$.

Für $h_2 = h_1 > 0 : \rho(h) = \frac{-h_1^3}{(\sqrt{2})^3 h_1^3} = -\frac{1}{(\sqrt{2})^3} \implies \rho(h) \nrightarrow 0$ $(h \to 0) \implies f$ ist in $(0,0)$ <u>nicht</u> db.

Satz 5.2 (Stetigkeit aller partiellen Ableitungen)
Sei $x_0 \in D$ und <u>alle</u> partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ seien auf D vorhanden und in x_0 stetig $(j = 1, \dots, m, \ k = 1, \dots, n)$. Dann ist f in x_0 db.

Beweis
O.B.d.A: $m = 1$ und $x_0 = 0$. Der Übersicht wegen sei $n = 2$.

Für $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$:

$$\rho(h) := \frac{1}{\|h\|}(f(h) - f(0,0) - (\underbrace{h_1 f_x(0,0) + h_2 f_y(0,0)}_{=\operatorname{grad} f(0,0)\cdot h}))$$

$$f(h) - f(0) = f(h_1,h_2) - f(0,0) = \underbrace{f(h_1,h_2) - f(0,h_2)}_{=:\Delta_1} + \underbrace{f(0,h_2) - f(0,0)}_{=:\Delta_2}$$

$\varphi(t) := f(t, h_2)$, t zwischen 0 und $h_1 \implies \Delta_1 = \varphi(h_1) - \varphi(0)$, $\varphi'(t) = f_x(t, h_2)$

Aus dem Mittelwertsatz aus Analysis I folgt: $\exists \xi = \xi(h)$ mit $0 \leq \xi \leq h_1 : \Delta_1 = h_1\varphi(\xi) = h_1 f_x(\xi, h_2)$
$\exists \eta = \eta(h)$ zw. 0 und $h_2 : \Delta_2 = h_2\varphi(\eta) = h_2 f_x(\eta, h_2)$

$$\implies \rho(h) := \frac{1}{\|h\|}(h_1 f_x(\xi, h_2) - h_2 f_y(0,\eta) - (h_1 f_x(0,0) + h_2 f_y(0,0)))$$
$$= \frac{1}{\|h\|}h(\underbrace{f_x(\xi,h_2) - f_x(0,0),\ f_y(0,\eta) - f_y(0,0)}_{=:v(h)}) = \frac{1}{\|h\|}h \cdot v(h)$$

$$\implies |\rho(h)| = \frac{1}{\|h\|}|h \cdot v(h)| \overset{\text{CSU}}{\leq} \frac{1}{\|h\|}\|h\|\|v(h)\| = \|v(h)\|$$

f_x, f_y sind stetig in $(0,0) \implies v(h) \to 0$ $(h \to 0) \implies \rho(h) \to 0$ $(h \to 0)$ ■

Folgerung 5.3
Ist $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m) \implies f$ ist auf D db.

Definition
Sei $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$. Dann heißt f **auf D k-mal stetig db**.

Beispiele:

(1) $f(x,y,z) = (x^2 + y, xyz)$. $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \implies f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

$\overset{5.3}{\implies}$ f ist auf $\mathbb{R}^3$ db und $f'(x,y,z) = J_f(x,y,z)\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\underline{\text{linear}}$, es ex. also eine $(m \times n)$-Matrix $A : f(x) = Ax\ (x \in \mathbb{R}^n)$.

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ gilt:
$\rho(h) = \frac{1}{\|h\|}(f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah) = \frac{1}{\|h\|}(f(x_0) + f(h) - f(x_0) - f(h)) = 0.$

Also: f ist auf $\mathbb{R}^n$ db und $f'(x) = A\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(2.1) $n = m$ und $f(x) = x = Ix$ ($I = (m \times n)$-Einheitsmatrix). Dann: $f'(x) = I\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(2.2) $m = 1 :\ \exists a \in \mathbb{R}^n : f(x) = ax\ (x \in \mathbb{R}^n)$ (Linearform). $f'(x) = a\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(3)

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, falls} (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Bekannt: f ist in $(0,0)$ db. Übungsblatt: f_x, f_y sind in $(0,0)$ $\underline{\text{nicht}}$ stetig.

(4) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g = (g_1, \dots, g_m) : I \to \mathbb{R}^m;\ g_1, \dots, g_m : I \to \mathbb{R}$.

g ist in $t_0 \in I$ db $\iff$ $g_1, \dots, g_m$ sind in $t_0 \in I$ db. In diesem Fall gilt: $g'(t_0) = (g_1'(t_0), \dots, g_m'(t_0))$.

(4.1) $m = 2 : g(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$. $g'(t) = (-\sin t, \cos t)$.

(4.2) Seien $a, b \in \mathbb{R}^m,\ g(t) = a + t(b - a),\ t \in [0,1],\ g'(t) = b - a$.

Satz 5.4 (Kettenregel)
f sei in $x_0 \in D$ db, $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^m$, E sei offen, $f(D) \subseteq E$ und $g : E \to \mathbb{R}^p$ sei db in $y_0 := f(x_0)$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$ db in x_0 und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \text{ (Matrizenprodukt)}$$

Beweis
$A := f'(x_0),\ B := g'(y_0) = g'(f(x_0)),\ h := g \circ f.$

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0) - B(y - y_0)}{\|y - y_0\|} & \text{, falls } y \in E \backslash \{y_0\} \\ 0 & \text{, falls } y = y_0 \end{cases}$$

g ist db in $y_0 \implies \tilde{g}(y) \to 0$ $(y \to y_0)$. Aus Satz 5.1 folgt, dass f stetig ist in $x_0 \implies f(x) \to f(x_0) = y_0$ $(x \to x_0) \implies \tilde{g}(f(x)) \to 0$ $(x \to x_0)$

Es ist $g(y) - g(y_0) = \|y - y_0\|\tilde{g}(y) = B(y - y_0)$ $\forall y \in E$.

$$\begin{aligned}
&\frac{h(x) - h(x_0) - BA(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \frac{1}{\|x - x_0\|}(g(f(x)) - g(f(x_0)) - BA(x - x_0)) \\
&= \frac{1}{\|x - x_0\|}(\|f(x) - f(x_0)\|\tilde{g}(f(x)) + B(f(x) - f(x_0)) - BA(x - x_0)) \\
&= \underbrace{\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{=:D(x)} \underbrace{\tilde{g}(f(x))}_{\to 0} \underbrace{+ B(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|}}_{\overset{f \text{ db}}{\to} 0 \ (x \to x_0)})}_{\overset{3.5}{\to} 0 \ (x \to x_0)}
\end{aligned}$$

Noch zu zeigen: $D(x)$ bleibt in der „Nähe“ von x_0 beschränkt.

$$\begin{aligned}
&0 \leq D(x) = \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) + A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\
&= \underbrace{\frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\to 0 \ (x \to x_0)} + \underbrace{\frac{\|A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\leq \|A\|}.
\end{aligned}$$

■

Wichtigster Fall $g = g(x_1, \ldots, x_m)$ reellwertig,

$$\begin{aligned}
h(x) &= h(x_1, \ldots, x_n) \\
&= g(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \\
&= (g \circ f)(x)
\end{aligned}$$

$$h_{x_j}(x) = g_{x_1}(f(x))\tfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) + g_{x_2}(f(x))\tfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) + \cdots + g_{x_m}(f(x))\tfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(x)$$

Beispiel
$g = g(x, y, z)$, $h(x, y) = g(xy, x^2 + y, x \sin y) = g(f(x, y))$.

$h_x(x, y) = g_x(f(x, y))y + g_y(f(x, y))2x + g_z(f(x, y)) \sin y$.
$h_y(x, y) = g_x(f(x, y))x + g_y(f(x, y))1 + g_z(f(x, y))x \cos y$.

Hilfssatz
Es sei A eine $(m \times n)$-Matrix (reell), es sei B eine $(n \times m)$-Matrix (reell) und es gelte

(i) $BA = I (= (n \times n)$-Einheitsmatrix) und

(ii) $AB = \tilde{I} (= (m \times m)$-Einheitsmatrix)

Dann: $m = n$.

Beweis
$\Phi(x) := Ax (x \in \mathbb{R}^n)$. Lin. Alg. $\implies \Phi$ ist linear, $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $\overset{\text{(i)}}{\implies} \Phi$ ist injektiv, also $Kern \Phi = 0$. (ii) Sei $z \in \mathbb{R}^m, x := Bz \overset{\text{(ii)}}{\implies} z = ABz = Ax = \Phi(x) \implies \Phi$ ist surjektiv. Dann: $n = \dim \mathbb{R}^n \overset{\text{LA}}{=} \dim \operatorname{Kern} \Phi + \dim \Phi(\mathbb{R}^n) = m$. ■

Satz 5.5 (Injektivität und Dimensionsgleichheit)
$f : D \to \mathbb{R}^m$ sei db auf D, es sei $f(D)$ offen, f injektiv auf D und $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}^n$ sei db auf $f(D)$. Dann:

(1) $m = n$

(2) $\forall x \in D : f'(x)$ ist eine invertierbare Matrix und $f'(x)^{-1} = (f^{-1})'(f(x))$

Beachte:

(1) Ist D offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ db, so muss i. A. $f(D)$ nicht offen sein. Z.B.: $f(x) = \sin x, D = \mathbb{R}, f(D) = [-1, 1]$

(2) Ist D offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$ db und injektiv, so muss i.A. f^{-1} <u>nicht</u> db sein. Z.B.: $f(x) = x^3, D = \mathbb{R}, f^{-1}$ ist in 0 <u>nicht</u> db.

Beweis
von 5.5: $g := f^{-1}; x_0 \in D, z_0 := f(x_0)(\implies x_0 = g(z_0))$ Es gilt: $g(f(x)) = x \forall x \in D, f(g(z)) = z \forall z \in f(D) \overset{5.4}{\implies} g'(f(x)) \cdot f'(x) = I \forall x \in D; f'(g(z)) \cdot g'(z) = \tilde{I} \forall z \in f(D) \implies \underbrace{g'(z_0)}_{=:B} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{=:A} = I, f'(x_0) \cdot g'(z_0) = \tilde{I} \overset{5.5}{\implies} m = n$ und $f'(x_0)^{-1} = g'(z_0) = (f^{-1})'(f(x_0))$. ■

6. Differenzierbarkeitseigenschaften reellwertiger Funktionen

Definition

(1) Seien $a, b \in \mathbb{R}^n; S[a,b] := \{a + t(b-a) : t \in [0,1]\}$ heißt **Verbindungsstrecke** von a und b

(2) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex** $: \iff$ aus $a, b \in M$ folgt stets: $S[a,b] \subseteq M$

(3) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$. $S[x^{(0)}, \dots, x^{(k)}] := \bigcup_{j=1}^{k} S[x^{(j-1)}, x^{(j)}]$ heißt **Streckenzug** durch $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$ (in dieser Reihenfolge!)

(4) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$. G heißt **Gebiet**: $\iff$ G ist offen und aus $a, b \in G$ folgt: $\exists x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \in G : x^{(0)} = a, x^{(k)} = b$ und $S[x^{(0)}, \dots, x^{(k)}] \subseteq G$.

Vereinbarung: Ab jetzt in diesem Paragraphen: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Satz 6.1 (Der Mittelwertsatz)
$f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf D, es seien $a, b \in D$ und $S[a,b] \subseteq D$. Dann:

$$\exists\ \xi \in S[a,b] : f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)$$

Beweis
Sei $g(t) := a + t \cdot (b-a)$ für $t \in [0,1]$. $g([0,1]) = S[a,b] \subseteq D$. $\Phi(t) := f(g(t))(t \in [0,1])$ 5.4 $\implies$ Φ ist differenzierbar auf $[0,1]$ und $\Phi'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = f'(a + t(b-a)) \cdot (b-a)$. $f(b) - f(a) = \Phi(1) - \Phi(0) \xRightarrow{\text{MWS, AI}} \Phi'(\eta) = f'(\underbrace{a + \eta(b-a)}_{=:\xi \in S}) \cdot (b-a), \eta \in [0,1]$ ■

Folgerungen 6.2
Sei D ein **Gebiet** und $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf D.

(1) Ist $f'(x) = 0\ \forall x \in D \implies f$ ist auf D konstant.

(2) Ist $f'(x) = g'(x) \forall x \in D \implies \exists c \in \mathbb{R} : f = g + c$ auf D.

Beweis
(2) folgt aus (1). (1) Seien $a, b \in D$. Z.z.: $f(a) = f(b)$. $\exists x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \in D, x^{(0)} = a, x^{(k)} = b :$ $S[x^{(0)}, \dots, x^{(k)}] \subseteq D\ \forall j \in \{1, \dots, k\}$ ex. nach 6.1 ein $\xi_j \in S[x^{(j-1)}, x^{(j)}] : f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)}) =$

$\underbrace{f'(\xi_j)}_{0}\cdot(x^{(j)}-x^{(j-1)})=0 \implies f(x^{(j)})=f(x^{(j-1)}) \implies f(a)=f(x^{(0)})=f(x^{(1)})=f(x^{(2)})= \ldots = f(x^{(k)})=f(b).$ ■

Satz 6.3 (Bedingung für Lipschitzstetigkeit)
D sei konvex und $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf D. Weiter sei f' auf D beschränkt. Dann ist f auf D Lipschitzstetig.

Beweis
$\exists L \geq 0 : \|f'(x)\| \leq L \forall x \in D$. Seien $u, v \in D$. D konvex $\implies S[u,v] \subseteq D$. 6.1 $\implies \exists \xi \in S[u,v]$: $f(u)-f(v) = f'(\xi)\cdot(u-v) \implies |f(u)-f(v)| = |f'(\xi)\cdot(u-v)| \overset{CSU}{\leq} \|f'(\xi)\|\|u-v\| \leq L\|u-v\|$. ■

Satz 6.4 (Linearität)
Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

Φ ist linear $\iff \Phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und $\Phi(\alpha x) = \alpha\Phi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis
“ $\implies$ ”: “ $\impliedby$ ”: O.B.d.A.: $m = 1$. Z.z.: $\exists a \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = a \cdot x \forall x \in \mathbb{R}^n$. $a := \Phi'(0)\Phi(0) = \Phi(2\cdot 0) = 2\cdot\Phi(0) \implies \Phi(0) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R} : \Phi(\alpha x) = \alpha\Phi(x) \overset{5.4}{\implies} \alpha\Phi'(\alpha x) = \alpha\Phi'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \Phi'(x) = \Phi'(\alpha x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall \alpha \neq 0. \xrightarrow{\alpha \to 0,\, f \in C^1} \Phi'(x) = \Phi'(0) = a\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. $g(x) := (\Phi(x) - ax)^2\ (x \in \mathbb{R}^n)$, $g(0) = (\Phi(0) - a \cdot 0)^2 = 0$. 5.4 $\implies g$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ und $g'(x) = 2(\Phi(x) - ax)(\Phi'(x) - a) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. 6.2(1) $\implies g(x) = g(0) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \implies \Phi(x) = a \cdot x\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. ■

Die Richtungsableitung Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Ist $a \in \mathbb{R}^n$ und $\|a\| = 1$, so heißt a eine **Richtung** (oder ein **Richtungsvektor**).

Sei $a \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung. D offen $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$. Gerade durch x_0 mit Richtung $a : \{x_0 + ta : t \in \mathbb{R}\}$. $\|x_0 + ta - x_0\| = \|ta\| = |t|$. Also: $x_0 + ta \in D$ für $t \in (-\delta, \delta)$, $g(t) := f(x_0 + ta)\ (t \in (-\delta, \delta))$.

f heißt **in x_0 in Richtung a db**, gdw. der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}$$

existiert und $\in \mathbb{R}$ ist. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}$$

die **Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung a**.

Beispiele:

(1) f ist in x_0 partiell db nach x_j $\iff$ f ist in x_0 db in Richtung e_j. In diesem Fall gilt: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0)$.

(2)
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$x_0 = (0,0)$. Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine Richtung, also $a_1^2 + a_2^2 = 1$; $\frac{f(ta)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}\frac{t^2 a_1 a_2}{t^2 a_1^2 + t^2 a_2^2} = \frac{a_1 a_2}{t}$. D.h.: $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)$ ex. $\iff$ $a_1 a_2 = 0$ $\iff$ $a \in \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$. In diesem Fall: $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = 0$.

(3)
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$x_0 = (0,0)$. Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}$ eine Richtung. $\frac{f(ta)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}\frac{t^3 a_1 a_2^2}{t^2 a_1^2 + t^4 a_2^4} = \frac{a_1 a_2^2}{a_1^2 + t^2 a_2^4} \overset{t\to 0}{\to} \begin{cases} 0 & \text{, falls } a_1 = 0 \\ \frac{a_2^2}{a_1} & \text{, falls } a_1 \neq 0 \end{cases}$

D.h. $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)$ existiert für <u>jede</u> Richtung $a \in \mathbb{R}^2$. Z.B.: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) : \frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$f(x, \sqrt{x}) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}\ \forall x > 0 \implies f$ ist in $(0,0)$ <u>nicht</u> stetig.

Satz 6.5 (Richtungsableitungen)
Sei $x_0 \in D,\ a \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung, $f : D \to \mathbb{R}$.

(1) $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ existiert $\iff$ $\frac{\partial f}{\partial(-a)}(x_0)$ existiert. In diesem Fall ist:
$$\frac{\partial f}{\partial(-a)}(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$$

(2) f sei in x_0 db. Dann:

(i) $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ existiert und
$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = a \cdot \operatorname{grad} f(x_0).$$

(ii) Sei $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$ und $a_0 := \|\operatorname{grad} f(x_0)\|^{-1} \cdot \operatorname{grad} f(x_0)$. Dann:
$$\frac{\partial f}{\partial(-a_0)}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|.$$

Weiter gilt: $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) < \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0)$, falls $a \neq a_0$; $\frac{\partial f}{\partial(-a_0)}(x_0) < \frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$, falls $a \neq -a_0$.

Beweis

(1) $\frac{(f(x_0+t(-a))-f(x_0))}{t} = -\frac{(f(x_0+(-t)a)-f(x_0))}{-t} \Longrightarrow$ Beh.

(2) (i) $g(t) := f(x_0+ta)$ ($|t|$ hinreichend klein). Aus Satz 5.4 folgt: g ist db in $t=0$ und $g'(0) = f'(x_0)\cdot a \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ existiert und ist $= g'(0) = \operatorname{grad} f(x_0)\cdot a$

(ii) $\underline{\left|\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)\right|} \overset{(i)}{=} |a\cdot\operatorname{grad} f(x_0)| \overset{\text{CSU}}{\leq} \|a\|\cdot\|\operatorname{grad} f(x_0)\| = \|\operatorname{grad} f(x_0)\| = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|}\operatorname{grad} f(x_0)\cdot$

$\operatorname{grad} f(x_0) = a_0\cdot\operatorname{grad} f(x_0) \overset{(i)}{=} \underline{\frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0)}$

$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial(-a_0)}(x_0) \overset{(1)}{=} -\frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|$

Sei $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) \xrightarrow{(i),(ii)} a\cdot\operatorname{grad} f(x_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0)\| \Longrightarrow a\cdot a_0 = 1 \Longrightarrow \|a-a_0\|^2 = (a-a_0)(a-a_0) = a\cdot a - 2a\cdot a_0 + a_0\cdot a_0 = 1-2+1 = 0 \Longrightarrow a = a_0$.■

Der Satz von Taylor Im Folgenden sei $f : D \to \mathbb{R}$ zunächst „genügend oft partiell db", $x_0 \in D$ und $h = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir führen folgenden Formalismus ein.

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \text{ („Nabla“); } \nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \operatorname{grad} f;\ \nabla f(x_0) := \operatorname{grad} f(x_0)$$

$$(h\cdot\nabla) := h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n};\ (h\cdot\nabla)f := h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+h_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = h\operatorname{grad} f;\ (h\cdot\nabla)f(x_0) := h\cdot\operatorname{grad} f(x_0)$$

$(h\cdot\nabla)^{(0)}f(x_0) := f(x_0)$. Für $k\in\mathbb{N} : (h\cdot\nabla)^{(k)} := \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k$

$(h\cdot\nabla)^{(2)}f(x_0) = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n h_jh_k\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(x_0)$

$(h\cdot\nabla)^{(3)}f(x_0) = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n h_jh_kh_l\frac{\partial^3 f}{\partial x_j\partial x_k\partial x_l}(x_0)$

Beispiel
$(n=2) : h = (h_1,h_2)$.

$(h\cdot\nabla)^{(0)}f(x_0) = f(x_0),\ (h\cdot\nabla)^{(1)}f(x_0) = h\cdot\operatorname{grad} f(x_0) = h_1f_x(x_0)+h_2f_y(x_0)$.

$(h\cdot\nabla)^{(2)}f(x_0) = \left(h_1\frac{\partial f}{\partial x}+h_2\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(x_0) = h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0)+h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0)+h_2h_1\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0)+h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0)$.

Satz 6.6 (Der Satz von Taylor)
Sei $k\in\mathbb{N}, f\in C^{k+1}(D,\mathbb{R}), x_0\in D, h\in\mathbb{R}^n$ und $S[x_0,x_0+h]\subseteq D$. Dann:

$$f(x_0+h) = \sum_{j=0}^k\frac{(h\cdot\nabla)^{(j)}f(x_0)}{j!}+\frac{(h\cdot\nabla)^{(k+1)}f(\xi)}{(k+1)!}$$

wobei $\xi\in S[x_0,x_0+h]$

Beweis
$\Phi(t) := f(x_0+th)$ für $t \in [0,1]$. 5.4 $\Longrightarrow$ $\Phi \in C^{k+1}[0,1]$, $\Phi'(t) = f'(x_0+th)\cdot h = (h\cdot\nabla)f(x_0+th)$ Induktiv: $\Phi^{(j)}(t) = (h\cdot\nabla)^{(j)} f(x_0+th)$ $(j = 0, \dots, k+1, t \in [0,1])$. $\Phi(0) = f(x_0), \Phi(1) = f(x_0+h)$; $\Phi^{(j)}(0) = (h\cdot\nabla)^{(j)} f(x_0)$. Analysis 1 (22.2) $\Longrightarrow$ $\Phi(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\Phi^{(j)}(0)f(x_0)}{j!} + \frac{\Phi^{(k+1)}f(\eta)}{(k+1)!}$, wobei $\eta \in [0,1]$ $\Longrightarrow$ $f(x_0+h) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(h\cdot\nabla)^{(j)}f(x_0)}{j!} + \frac{(h\cdot\nabla)^{(k+1)}f(x_0+\eta h)}{(k+1)!}$, $\xi := x_0 + \eta h$ ■

Spezialfall 6.7 Sei $f \in C^2(D,\mathbb{R}), x_0 \in D, h \in \mathbb{R}^n, S[x_0, x_0+h] \subseteq D$. Dann:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0)\cdot h + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0+\eta h)$$

7. Quadratische Formen

Vereinbarung: In diesem Paragraphen sei A stets eine reelle und symmetrische $(n\times n)$-Matrix, $(A = A^\top)$. Also: $A = (a_{jk})$, dann $a_{jk} = a_{kj}$ $(k, j = 1, \dots, n)$

Definition
$Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $Q_A(x) := x(Ax)$. Q_A heißt die zu A gehörende **quadratische Form**. Für $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$Q_A(x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k$$

Beispiel
Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R}), x_0 \in D, h \in \mathbb{R}^n, S[x_0, x_0 + h] \subseteq D$.

$$H_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_2x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

heißt die **Hesse-Matrix** von f in x_0. 4.1 $\Longrightarrow$ $H_f(x_0)$ ist symmetrisch. Aus 6.7 folgt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} Q_B(h) \text{ mit } B = H_f(x_0 + \eta h)$$

Definition

A heißt **positiv definit** (pd) $:\Longleftrightarrow Q_A(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
A heißt **negativ definit** (nd) $:\Longleftrightarrow Q_A(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
A heißt **indefinit** (id) $:\Longleftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{R}^n : Q_A(u) > 0, Q_A(v) < 0$

Beispiele:

(1) $(n = 2)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$
$Q_A(x, y) := ax^2 + 2bxy + cy^2$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$. Nachrechnen:

$$aQ_A(x, y) = (ax + by)^2 + (\det A)y^2\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Übung:

A ist positiv definit $\Longleftrightarrow a > 0, \det A > 0$
A ist negativ definit $\Longleftrightarrow a < 0, \det A > 0$
A ist indefinit $\Longleftrightarrow \det A < 0$

(2) $(n = 3)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
$Q_A(x, y, z) = (x + z)^2\ \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $Q_A(0, 1, 0) = 0$. A ist weder pd, noch id, noch nd.

(3) ohne Beweis (→ Lineare Algebra). A symmetrisch $\implies$ alle **Eigenwerte** (EW) von A sind $\in \mathbb{R}$.

A ist positiv definit $\iff$ Alle Eigenwerte von A sind > 0
A ist negativ definit $\iff$ Alle Eigenwerte von A sind < 0
A ist indefinit $\iff$ $\exists$ Eigenwerte λ, μ von A mit $\lambda > 0,\ \mu < 0$

Satz 7.1 (Regeln zu definiten Matrizen und quadratischen Formen)

(1) A ist positiv definit $\iff$ $-A$ ist negativ definit

(2) $Q_A(\alpha x) = \alpha^2 Q_A(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(3) A ist positiv definit $\iff$ $\exists c > 0 : Q_A(x) \geq c\|x\|^2\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
A ist negativ definit $\iff$ $\exists c > 0 : Q_A(x) \leq -c\|x\|^2\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Beweis

(1) Klar

(2) $Q_A(\alpha x) = (\alpha x)(A(\alpha x)) = \alpha^2 x(Ax) = \alpha^2 Q_A(x)$

(3) „ $\Longleftarrow$ “: Klar. „ $\Longrightarrow$ “: $K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \partial U_1(0)$ ist beschränkt und abgeschlossen. Q_A ist stetig auf K. 3.3 $\implies$ $\exists x_0 \in K : Q_A(x_0) \leq Q_A(x)\ \forall x \in K$. $c := Q_A(x_0)$. A positiv definit, $x_0 \neq 0$ $\implies$ $Q_A(x_0) = c > 0$. Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; $z := \frac{1}{\|x\|}x$ $\implies$ $z \in K$ $\implies$ $Q_A(z) \geq c$ $\implies$ $c \leq Q_A\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) \overset{(2)}{=} \frac{1}{\|x\|}^2 Q_A(x)$ $\implies$ $Q_A(x) \geq c\|x\|^2$ ■

Satz 7.2 (Störung von definiten Matrizen)

(1) A sei positiv definit (*negativ definit*). Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit: Ist $B = (b_{jk})$ eine weitere symmetrische $(n \times n)$-Matrix und gilt: $(*)$ $|a_{jk} - b_{jk}| \leq \varepsilon$ $(j, k = 1, \ldots, n)$, so ist B positiv definit (*negativ definit*).

(2) A sei indefinit. Dann existieren $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ mit: ist $B = (b_{jk})$ eine weitere symmetrische $(n \times n)$-Matrix und gilt: $(*)$ $|a_{jk} - b_{jk}| \leq \varepsilon$ $(j, k = 1, \ldots, n)$, so ist $Q_B(u) > 0, Q_B(v) < 0$. Insbesondere: B ist indefinit.

Beweis

(1) A sei positiv definit $\overset{7.1}{\implies}$ $\exists c > 0 : Q_A(x) \geq c\|x\|^2\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. $\varepsilon := \frac{c}{2n^2}$. Sei $B = (b_{jk})$ eine symmetrische Matrix mit $(*)$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$ $Q_A(x) - Q_B(x) \leq |Q_A(x) - Q_B(x)| = \left|\sum_{j,k=1}^{m} (a_{jk} - b_{jk}) x_j x_k\right| \leq \sum_{j,k=1}^{n} \underbrace{|a_{jk} - b_{jk}|}_{\leq \varepsilon} \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|} \underbrace{|x_k|}_{\leq \|x\|} \leq \varepsilon \|x\|^2 n^2 = \frac{c}{2n^2}\|x\|^2 n^2 = \frac{c}{2}\|x\|^2$

(2) A sei indefinit. $\exists u, v \in \mathbb{R}^n :$ $Q_A(u) > 0, Q_A(v) < 0$. $\alpha := \min\left\{\frac{Q_A(u)}{\|u\|^2},\ -\frac{Q_A(v)}{\|v\|^2}\right\}$ $\implies$ $\alpha > 0$. $\varepsilon := \frac{\alpha}{2n^2}$. Sei $B = (b_{jk})$ eine symmetrische Matrix mit $(*)$.

$Q_A(u) - Q_B(u) \overset{\text{Wie bei (1)}}{\leq} \varepsilon u^2 \|u\|^2 = \frac{\alpha}{2n^2} n^2 \|u\|^2 = \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 \leq \frac{1}{2}\frac{Q_A(u)}{\|u\|^2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}Q_A(u) \implies$ $Q_B(u) \geq \frac{1}{2}Q_A(u) > 0$. Analog: $Q_B(v) < 0$. ■

8. Extremwerte

Vereinbarung: In diesem Paragraphen sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

Definition

(1) f hat in x_0 ein **lokales Maximum** $:\iff \exists \delta > 0 : \; f(x) \leq f(x_0) \; \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$.
f hat in x_0 ein **lokales Minimum** $:\iff \exists \delta > 0 : \; f(x) \geq f(x_0) \; \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$.
lokales Extremum = lokales Maximum oder lokales Minimum

(2) Ist D offen, f in x_0 partiell differenzierbar und $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$, so heißt x_0 ein stationärer Punkt.

Satz 8.1 (Nullstelle des Gradienten)
Ist D offen und hat f in x_0 ein lokales Extremum und ist f in x_0 partiell differenzierbar, dann ist $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

Beweis
f habe in x_0 ein lokales Maximum. Also $\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$ und $f(x) \leq f(x_0) \; \forall x \in U_\delta(x_0)$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann: $x_0 + te_j \in U_\delta(x_0)$ für $t \in (-\delta, \delta)$. $g(t) := f(x_0 + te_j)$ $(t \in (-\delta, \delta))$. g ist differenzierbar in $t = 0$ und $g'(0) = f_{x_j}(x_0)$. $g(t) = f(x_0 + te_j) \leq f(x_0) = g(0) \; \forall t \in (-\delta, \delta)$. Analysis 1, 21.5 $\implies g'(0) = 0 \implies f_{x_j}(x_0) = 0$ ■

Satz 8.2 (Definitheit und Extremwerte)
Sei D offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

(i) Ist $H_f(x_0)$ positiv definit $\implies$ f hat in x_0 ein lokales Minimum.

(ii) Ist $H_f(x_0)$ negativ definit $\implies$ f hat in x_0 ein lokales Maximum.

(iii) Ist $H_f(x_0)$ indefinit $\implies$ f hat in x_0 kein lokales Extremum.

Beweis

(i), (ii) $A := H_f(x_0)$ sei positiv definit oder negativ definit oder indefinit. Sei $\varepsilon > 0$ wie in 7.2. $f \in C^2(D, \mathbb{R}) \implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$ und $(*)$ $|f_{x_j x_k}(x) - f_{x_j x_k}(x_0)| \leq \varepsilon \; \forall x \in U_\delta(x_0)$ $(j, k = 1, \dots, n)$. Sei $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}, h := x - x_0 \implies x = x_0 + h, h \neq 0$ und $S[x_0, x_0 + h] \subseteq U_\delta(x_0)$ 6.7 $\implies \exists \eta \in [0, 1] : \; f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{h \cdot \operatorname{grad} f(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2} Q_B(h)$, wobei $B = H_f(x_0 + \eta h)$. Also: $(**)$ $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} Q_B(h)$.

A sei positiv definit (*negativ definit*) $\overset{7.2}{\Longrightarrow}$ B ist positiv definit (*negativ definit*). $\overset{h\neq 0}{\Longrightarrow}$ $Q_B(h) \overset{(<)}{>} 0 \overset{(**)}{\Longrightarrow} f(x) \overset{(<)}{>} f(x_0) \Longrightarrow f$ hat in x_0 ein lokales Minimum (*Maximum*).

(iii) A sei indefinit und es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ wie in 7.2. Wegen 7.1 OBdA: $\|u\| = \|v\| = 1$. Dann: $x_0 + tu, x_0 + tv \in U_\delta(x_0)$ für $t \in (-\delta, \delta)$. Sei $t \in (-\delta, \delta), t \neq 0$. Mit $h := t \overset{(v)}{u}$ folgt aus 7.2 und $(**)$: $f(x_0 + t \overset{(v)}{u}) = f(x_0) + \frac{1}{2} Q_B(t \overset{(v)}{u}) = f(x_0) + \frac{t^2}{2} \underbrace{Q_B(\overset{(v)}{u})}_{>0/<0\ (7.2)} \overset{(>)}{<} f(x_0) \Longrightarrow f$ hat in x_0 kein lokales Extremum. ■

Beispiele:

(1) $D = \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - 5$. $f_x = 2x - 2y, f_y = 2y - 2x$; $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow x = y$. Stationäre Punkte: (x, x) $(x \in \mathbb{R})$.

$$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = -2 = f_{yx},\ f_{yy} = 2 \Longrightarrow H_f(x, x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(x, x) = 0 \Longrightarrow H_f(x, x)$ ist weder pd, noch nd, noch id.
Es ist $f(x, y) = (x - y)^2 - 5 \geq -5\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $f(x, x) = -5\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $D = \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$.
$f_x = 3x^2 - 12y = 3(x^2 - 4y),\ f_y = -12x + 24y^2 = 12(-x + 2y^2)$. $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow x^2 = 4y, x = 2y^2 \Longrightarrow 4y^4 = 4y \Longrightarrow y = 0$ oder $y = 1 \Longrightarrow (x, y) = (0, 0)$ oder $(x, y) = (2, 1)$

$$f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = -12 = f_{yx},\ f_{yy} = 48y.\ H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(0, 0) = -144 < 0 \Longrightarrow H_f(0, 0)$ ist indefinit $\Longrightarrow f$ hat in $(0, 0)$ kein lokales Extremum.

$$H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$$

$12 > 0, \det H_f(2, 1) > 0 \Longrightarrow H_f(2, 1)$ ist positiv definit $\Longrightarrow f$ hat in $(2, 1)$ ein lokales Minimum.

(3) $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, y \leq -x + 3\}, f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$. Bestimme $\max f(K), \min f(K)$. $f(x, y) = xy(3 - x - y)$. $K = \partial K \cup K^\circ$. K ist beschränkt und abgeschlossen $\overset{3.3}{\Longrightarrow} \exists\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K : \max f(K) = f(x_1, y_1), \min f(K) = f(x_2, y_2)$. $f \geq 0$ auf K, $f = 0$ auf ∂K, also $\min f(K) = 0$. f ist nicht konstant $\Longrightarrow f(x_2, y_2) > 0 \Longrightarrow (x_2, y_2) \in K^\circ \overset{8.1}{\Longrightarrow} \operatorname{grad} f(x_1, x_2) = 0$. Nachrechnen: $(x_2, y_2) = (1, 1); f(1, 1) = 1 = \max f(K)$.

9. Der Umkehrsatz

Erinnerung: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$. U ist eine Umgebung von $x_0 \iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq U$

Hilfssatz 9.1 (Offenheit des Bildes)
Sei $\delta > 0, f : U_\delta(0) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $f(0) = 0$ und V sei eine offene Umgebung von $f(0)$ $(= 0)$. $U := \{x \in U_\delta(0) : f(x) \in V\}$. Dann ist U eine offene Umgebung von 0.

Beweis
Übung ■

Erinnerung: Cramersche Regel: Sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix, $\det A \neq 0$, und $b \in \mathbb{R}^n$. Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau eine Lösung: $x = (x_1, \ldots, x_n) = A^{-1}b$. Ersetze in A die j-te Spalte durch $b^\top$. Es entsteht eine Matrix A_j. Dann: $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$.

Satz 9.2 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n, D$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. f sei auf D injektiv und es sei $f(D)$ offen. Weiter sei $\det f'(x) \neq 0\ \forall x \in D$ und f^{-1} sei auf $f(D)$ differenzierbar. Dann: $f^{-1} \in C^1(f(D), \mathbb{R}^n)$.

Beweis
Sei $f^{-1} = g = (g_1, \ldots, g_n), g = g(y)$. Zu zeigen: $\frac{\partial g_j}{\partial y_k}$ sind stetig auf $f(D)$. 5.6 $\Longrightarrow g'(y) \cdot f'(x) = I$ ($n \times n$-Einheitsmatrix), wobei $y = f(x) \in f(D) \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} g_1'(y) \\ \vdots \\ g_n'(y) \end{pmatrix} \cdot f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \operatorname{grad} g_j(y) \cdot f'(x) = e_j \Longrightarrow f'(x)^\top \cdot \operatorname{grad} g_j(y)^\top = e_j^\top$. Ersetze in $f'(x)^\top$ die k-te Spalte durch $e_j^\top$. Es entsteht die Matrix $A_k(x) = A_k(f^{-1}(y))$. Cramersche Regel $\Longrightarrow \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(y) = \frac{\det A_k(f^{-1}(y))}{\det f'(x)} = \frac{\det A_k(f^{-1}(y))}{\det f'(f^{-1}(y))}$. $f \in C^1(D, \mathbb{R}), f^{-1}$ stetig $\Longrightarrow$ obige Definitionen hängen stetig von y ab $\Longrightarrow \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \in C(f(D), \mathbb{R})$. ■

Satz 9.3 (Der Umkehrsatz)
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D sei offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in D$ und $\det f'(x_0) \neq 0$.
Dann existiert eine offene Umgebung U von x_0 und eine offene Umgebung V von $f(x_0)$ mit:

(a) f ist auf U injektiv, $f(U) = V$ und $\det f'(x) \neq 0\ \forall x \in U$

(b) Für $f^{-1} : V \to U$ gilt: f^{-1} ist stetig differenzierbar auf V und

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}\ \forall x \in U$$

Folgerung 9.4 (Satz von der offenen Abbildung)
D und f seien wie in 9.3 und es gelte: $\det f'(x) \neq 0 \ \forall x \in D$. Dann ist $f(D)$ offen.

Beweis
O.B.d.A: $x_0 = 0$, $f(x_0) = f(0) = 0$ und $f'(0) = I$ (=$(n \times n)$-Einheitsmatrix)

Die Abbildungen $x \mapsto \det f'(x)$ und $x \mapsto \|f'(x) - I\|$ sind auf D stetig, $\det f'(0) \neq 0$, $\|f'(0) - I\| = 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$: $K := U_\delta(0) \subseteq D$, $\overline{K} = \overline{U_\delta(0)} \subseteq D$ und

(1) $\det f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \overline{K}$ und

(2) $\|f'(x) - I\| \leq \frac{1}{2n} \ \forall x \in \overline{K}$

(3) **Behauptung:** $\frac{1}{2}\|u - v\| \leq \|f(u) - f(v)\| \ \forall u, v \in \overline{K}$, insbesondere ist f injektiv auf $\overline{K}$

(4) f^{-1} ist stetig auf $f(\overline{K})$: Seien $\xi, \eta \in f(\overline{K})$, $u := f^{-1}(\xi)$, $v := f^{-1}(\eta) \implies u, v \in \overline{K}$ und $\|f^{-1}(\xi) - f^{-1}(\eta)\| = \|u - v\| \overset{(3)}{\leq} 2\|f(u) - f(v)\| = 2\|\xi - \eta\|$ ■

Beweis zu (3): $h(x) := f(x) - x \ (x \in D) \implies h \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ und $h'(x) = f'(x) - I$. Sei $h = (h1, \dots, h_n)$. Also: $h' = \begin{pmatrix} h_1' \\ \vdots \\ h_n' \end{pmatrix}$. Seien $u, v \in \overline{K}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$.

$|h_j(u) - h_j(v)| \overset{6.1}{=} |h_j'(\xi) \cdot (u - v)| \overset{\text{CSU}}{\leq} \|h_j'(\xi)\|\|u - v\| \leq \|h'(\xi)\|\|u - v\|$, $\xi \in S[u, v] \in \overline{K}$. (2) $\implies \leq \frac{1}{2n}\|u - v\|$
$\implies \|h(u) - h(v)\| = \left(\sum_{j=1}^n (h_j(n) - h_j(v))^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{4n^2}\|u - v\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2n}\|u - v\|\sqrt{n} \leq \frac{1}{2}\|u - v\| \implies \|u - v\| - \|f(u) - f(v)\| \leq \|f(u) - f(v) - (u - v)\| = \|h(u) - h(v)\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\| \implies$ (3)

$V := U_{\frac{\delta}{4}}(0)$ ist eine offene Umgebung von $f(0)$ $(= 0)$. $U := \{x \in K : f(x) \in V\}$ Klar: $U \subseteq K \subseteq \overline{K}$, $0 \in U$, 9.1 $\implies$ U ist eine offene Umgebung von 0. (3) $\implies$ f ist auf U injektiv. (1) $\implies \det f'(x) \neq 0 \ \forall x \in U$. (4) $\implies$ f^{-1} ist stetig auf $f(U)$. Klar: $f(U) \subseteq V$. Für (a) ist noch zu zeigen: $V \subseteq f(U)$.

Sei $y \in V$. $w(x) := \|f(x) - y\|^2 = (f(x) - y) \cdot (f(x) - y) \implies w \in C^1(D, \mathbb{R})$ und (nachzurechnen) $w'(x) = 2(f(x) - y) \cdot f'(x)$. $\overline{K}$ ist beschränkt und abgeschlossen $\overset{3.3}{\implies} \exists x_1 \in \overline{K} :$ (5) $w(x_1) \leq w(x) \ \forall x \in \overline{K}$.

Behauptung: $x_1 \in K$.
Annahme: $x_1 \neq K \implies x_1 \in \partial K \implies \|x_1\| = \delta$. $2\sqrt{w(0)} = 2\|f(0) - y\| = 2\|y\| \leq 2\frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} = \frac{\|x_1\|}{2} = \frac{1}{2}\|x_1 - 0\| \overset{(3)}{\leq} \|f(x_1) - f(0)\| = \|f(x_1) - y + y - f(0)\| \leq \|f(x_1) - y\| - \|f(0) - y\| = \sqrt{w(x_1)} + \sqrt{w(0)} \implies \sqrt{w(0)} < \sqrt{w(x_1)} \implies w(0) < w(x_1) \overset{(5)}{\leq} w(0)$, Widerspruch. Also: $x_1 \in K$

(5) $\implies w(x_1) \leq w(x) \ \forall x \in K$. 8.1 $\implies w'(x_1) = 0 \implies (f(x_1) - y) \cdot f'(x_1) = 0$; (1) $\implies f'(x_1)$ ist invertierbar $\implies y = f(x_1) \implies x_1 \in U \implies y = f(x_1) \in f(U)$. Also: $f(U) = V$. Damit ist (a) gezeigt.

(b): Wegen 5.5 und 9.2 ist nur zu zeigen: f^{-1} ist differenzierbar auf V. Sei $y_1 \in V$, $y \in V \backslash \{y_1\}$, $x_1 := f^{-1}(y_1)$, $x := f^{-1}(y)$; $L(y) := \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1) - f'(x_0)^{-1}(y - y_1)}{\|y - y_1\|}$. zu zeigen: $L(y) \to 0$ $(y - y_1)$.

$\varrho(x) := f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1)$. f ist differenzierbar in $x_1 \implies \frac{\varrho(x)}{\|x-x_1\|} \to 0 \; (x \to x_1)$.

$$f'(x_1)^{-1}\varrho(x) = f'(x_1)^{-1}(y - y_1) - (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1)) = -\|y - y_1\| L(y)$$
$$\implies L(y) = -f'(x_1)^{-1}\frac{\varrho(x)}{\|y - y_1\|} = -f'(x_1)^{-1} \underbrace{\frac{\varrho(x)}{\|x - x_1\|}}_{\to 0\ (x \to x_1)} \cdot \underbrace{\frac{\|x - x_1\|}{\|f(x) - f(x_1)\|}}_{\leq 2,\text{ nach (3)}}$$

Für $y \to y_1$, gilt (wegen (4)) $x \to x_1 \implies L(y) \to 0$.

Beispiel

$$f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$$

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}, \det f'(x, y) = x \cos^2 y + x \sin^2 y = x$$

$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Sei $(\xi, \eta) \in D$ 9.3 $\implies \exists$ Umgebung U von (ξ, η) mit: f ist auf U injektiv $(*)$. z.B. $(\xi, \eta) = (1, \frac{\pi}{2}) \implies f(1, \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$. $f'(1, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(f^{-1})(0, 1) = f'(1, \frac{\pi}{2})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Beachte: f ist auf D „lokal“ injektiv (im Sinne von $(*)$), aber f ist auf D <u>nicht</u> injektiv, da $f(x, y) = f(x, y + 2k\pi)\ \forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

10. Implizit definierte Funktionen

Beispiele:

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. $f(x,y) = 0 \iff y^2 = 1 - x^2 \iff y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $y_0 \overset{(<)}{>} 0$. Dann existiert eine Umgebung U von x_0 und genau eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$ und $f(x, g(x)) = 0\ \forall x \in U$, nämlich $g(x) = \overset{(-\sqrt{\cdots})}{\sqrt{1-x^2}}$

Sprechweisen: „g ist implizit durch die Gleichung $f(x,y) = 0$ definiert" oder „die Gleichung $f(x,y) = 0$ kann in der Form $y = g(x)$ aufgelöst werden"

(2) $f(x,y,z) = y + z + \log(x+z)$. Wir werden sehen: $\exists$ Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(0,1)$ und genau eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $g(0,-1) = 1$ und $f(x,y,g(x,y)) = 0\ \forall\ (x,y) \in U$.

Der allgemeine Fall: Es seien $p, n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$, D offen, $f = (f_1, \ldots, f_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$. Punkte in D (bzw. $\mathbb{R}^{n+p}$) bezeichnen wir mit (x,y), wobei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, also $(x,y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$. Damit:

$$f' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} & \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{array}\right)\underbrace{\qquad\qquad}_{=:\frac{\partial f}{\partial x}\ (p\times n)\text{-Matrix}}\underbrace{\qquad\qquad}_{=:\frac{\partial f}{\partial y}\ (p\times p)\text{-Matrix}} ; \text{ also } f'(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

Satz 10.1 (Satz über implizit definierte Funktionen)
Sei $f : D \to \mathbb{R}^p$, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$, $(x_0, y_0) \in D$, $f(x_0, y_0) = 0$ und $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 und genau eine Funktion $g : U \to D \subseteq \mathbb{R}^p$ mit:

(1) $(x, g(x)) \in D\ \forall x \in U$

(2) $g(x_0) = y_0$

(3) $f(x, g(x)) = 0\ \forall x \in U$, mit $V = g(U)$ gilt: V ist offen und für $(a,b) \in U \times V$ mit $f(a,b) = 0$ gilt: $b = g(a)$

(4) $g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$

(5) $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0\ \forall x \in U$

(6) $g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\ \forall x \in U$

Beweis
Definition: $F : D \to \mathbb{R}^{n+p}$ durch $F(x,y) := (x, f(x,y))$. Dann: $F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n+p})$ und

$$F'(x,y) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & & & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \end{array}\right)$$

Dann:

(I) $\det F'(x,y) \overset{\text{LA}}{=} \det \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ $((x,y) \in D)$, insbesondere: $\det F'(x_0,y_0) \neq 0$. Es ist $F(x_0,y_0) = (x_0, 0)$. 9.3 $\Longrightarrow$ $\exists$ eine offene Umgebung $\mathbb{U}$ von (x_0,y_0) mit: $\mathbb{U} \subseteq D$, $f(\mathbb{U}) = \vartheta$. F ist auf $\mathbb{U}$ injektiv, $F^{-1} : \vartheta \to \mathbb{U}$ ist stetig differenzierbar und

(II) $\det F'(x,y) \overset{\text{(I)}}{=} \det \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0 \ \forall\ (x,y) \in \mathbb{U}$

Bezeichnungen: Sei $(s,t) \in \vartheta$ $(s \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^p)$, $F^{-1}(s,t) =: (u(s,t), v(s,t))$, also $u : \vartheta \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $v : \vartheta \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar. Dann: $(s,t) = F(F^{-1}(s,t)) = (u(s,t), f(u(s,t), v(s,t))) \implies u(s,t) = s \implies F^{-1}(s,t) = (s, v(s,t))$. Für $(x,y) \in \mathbb{U}$: $f(x,y) = 0 \iff F(x,y) = (x,0) \iff (x,y) = F^{-1}(x,0) = (x, v(x,0)) \iff y = v(x,0)$, insbesondere: $y_0 = v(x_0, 0)$. $U := \{x \in \mathbb{R}^n : (x,0) \in \vartheta\}$. Es gilt: $x_0 \in U$. Übung: U ist eine offene Umgebung von x_0.

Definition: $g : U \to \mathbb{R}^p$ durch $g(x) := v(x,0)$, für $x \in U$ gilt: $(x,0) \in \vartheta \implies F^{-1}(x,0) = (x, v(x,0)) = (x, g(x)) \in \mathbb{U}$. Dann gelten: (1), (2), (3) und (4). (5) folgt aus (II).

Zu (6): Definition für $x \in U : \psi(x) := (x, g(x)), \psi \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+p})$,

$$\psi'(x) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & g'(x) & \end{array}\right)$$

(3) $\implies$ $0 = f(\psi(x))\ \forall x \in U$. 5.4 $\implies$ $0 = f'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \middle| \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right) \cdot \psi'(x) \overset{\text{LA}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x)\ \forall x \in U$. (5) $\implies$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$ invertierbar, Multiplikation von links mit $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))^{-1}$ liefert (6). ■

Beispiel
$f(x,y,z) = y + z + \log(x+z)$. Zeige: $\exists$ offene Umgebung U von $(0,1)$ und genau eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $g(0,-1) = 1$ und $f(x,y,g(x,y)) = 0\ \forall (x,y) \in U$. Berechne g' an der Stelle $(0,-1)$.
$f(0,-1,1) = 0$, $f_z = 1 + \frac{1}{x+z}$; $f_z(0,-1,1) = 2 \neq 0$. Die Behauptung folgt aus dem Satz über impliziert definierte Funktionen. Also: $0 = y + g(x,y) + \log(x + g(x,y))\ \forall (x,y) \in U$.
Differentiation nach x: $0 = g_x(x,y) + \frac{1}{x+g(x,y)}(1 + g_x(x,y))\ \forall (x,y) \in U \overset{(x,y)=(0,-1)}{\Longrightarrow} 0 = g_x(0,-1) + \frac{1}{1}(g_x(0,-1) + 1) \implies g_x(0,-1) = -\frac{1}{2}$.
Differentiation nach y: $0 = 1 + g_y(x,y) + \frac{1}{x+g(x,y)} g_y(x,y)\ \forall (x,y) \in U \xRightarrow{\text{(x,y)=(0,-1)}} g_y(0,-1) = -\frac{1}{2}$.
Also: $g'(0,-1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

11. Extremwerte unter Nebenbedingungen

Definition
Seien M, N Mengen $\neq \emptyset$, $f : M \to N$ eine Funktion und $\emptyset \neq T \subseteq M$. Die Funktion $f_{|_T} : T \to N$, $f_{|_T}(x) := f(x)\ \forall x \in T$ heißt die **Einschränkung** von f auf T.

In diesem Paragraphen gelte stets: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, $p < n$ und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$. Es sei $T := \{x \in D : \varphi(x) = 0\} \neq \emptyset$.

Definition
f hat in $x_0 \in D$ ein **lokales Extremum unter der Nebenbedingung** $\varphi = 0 :\iff x_0 \in T$ und $f_{|_T}$ hat in x_0 ein lokales Extremum.

Wir führen folgende Hilfsfunktion ein: Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ und $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ gilt:

$$H(x, \lambda) := f(x) + \lambda \cdot \varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_p \varphi_p(x)$$

Es ist

$$H_{x_j} = f_{x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_j}\ (j = 1, \dots, n),\ H_{\lambda_j} = \varphi_j \quad (j = 1, \dots, p)$$

Für $x_0 \in D$ und $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ gilt:

$H'(x_0, \lambda_0) = 0 \iff f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0$. Außerdem gilt:
$\varphi(x_0) = 0 \iff f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0$ und $x_0 \in T$ (I)

Satz 11.1 (Multiplikationenregel von Lagrange)
f habe in $x_0 \in D$ eine lokales Extremum unter der Nebenbedingung $\varphi = 0$ und es sei Rang $\varphi'(x_0) = p$. Dann existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ mit: $H'(x_0, \lambda_0) = 0$ (λ_0 heißt **Multiplikator**).

Beispiel

$$f(x, y) := x^2 + y^2$$
$$\varphi(x, y) := x + y - 1$$

(Also $n = 2, p = 1$), $\varphi(x, y)' = (1, 1)$, Rang $\varphi(x, y)' = 1$
$H(\underset{\sim\sim}{x, y}, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$

$$\begin{aligned} H_x &= 2x + \lambda \overset{!}{=} 0 \\ H_y &= 2y + \lambda \overset{!}{=} 0 \\ H_\lambda &= x + y - 1 \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = y \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$.
Extremwertverdächtig: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Folgerung 11.2
T sei kompakt $\overset{3.3}{\Longrightarrow}$ $\exists a, b \in T : f(a) = \max f(T),\ f(b) = \min f(T)$. Ist Rang $\varphi'(\underset{b}{a}) = p \implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}^p : H'(\underset{b}{a}, \lambda_0) = 0$.

Beweis
Es ist $x_0 \in T$ und

$$\varphi'(x_0) = \left(\begin{array}{ccc|cc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_p}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n}(x_0) \end{array} \right)$$

with the left block marked $\underbrace{}_{=:A}$

Rang $\varphi'(x_0) = p \implies$ o.B.d.A.: $\det A \neq 0$.

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ schreiben wir $x = (y, z)$, wobei $y = (x_1, \ldots, x_p),\ z = (x_{p+1}, \ldots, x_n)$. Insbesondere ist $x_0 = (y_0, z_0)$. Damit gilt: $\varphi(y_0, z_0) = 0$ und $\det \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_0, z_0) \neq 0$.

Aus 10.1 folgt: $\exists$ offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$ von z_0, $\exists$ offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^p$ von y_0 und es existiert $g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ mit:

(II) $g(z_0) = y_0$

(III) $\varphi(g(z), z) = 0\ \forall z \in U$

(IV) $g'(z_0) = -(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \underbrace{(g(z_0), z_0)}_{=x_0})^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \underbrace{(g(z_0), z_0)}_{=x_0}$ ■

(III) $\implies (g(z), z) \in T\ \forall z \in U$. Wir definieren $h(z)$ durch

$$h(z) := f(g(z), z)\ (z \in U)$$

Dann hat h in z_0 ein lokales Extremum (<u>ohne</u> Nebenbedingung). Damit gilt nach 8.1:

$$0 = h'(z_0) \overset{5.4}{=} f'(g(z_0), z_0) \cdot \begin{pmatrix} g'(z_0) \\ I \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \right) \cdot \begin{pmatrix} g'(z_0) \\ I \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) g'(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)$$

$$\overset{\text{(IV)}}{=} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0) \right)^{-1}}_{=:\lambda_0 \in \mathbb{R}^p} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \implies \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0) = 0 \text{ (V)}$$

$$\lambda_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0)\right)^{-1} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0) = 0 \text{ (VI)}$$

Aus (V),(VI) folgt: $f'(x_0) + \lambda_0\varphi'(x_0) = 0 \overset{(I)}{\implies} H'(x_0, \lambda_0) = 0.$

Beispiel
$(n = 3, p = 2)$ $f(x, y, z) = x+y+z,\ T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 2,\ x+z = 1\},\ \varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2, x + z - 1)$.

Bestimme $\max f(T),\ \min f(T)$. Übung: T ist beschränkt und abgeschlossen $\overset{3.3}{\implies}$ $\exists a, b \in T : f(a) = \max f(T),\ f(b) = \min f(T)$.

$$\varphi'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang $\varphi'(x, y, z) = 1 < p = 2 \iff x = y = 0$. $a, b \in T \implies$ Rang $\varphi'(a) =$ Rang $\varphi'(b) = 2$

$H(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$

$$\begin{aligned}
H_x &= 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 &&\overset{!}{=} 0 \ (1)\\
H_y &= 1 + 2\lambda_1 y &&\overset{!}{=} 0 \ (2)\\
H_z &= 1 + \lambda_2 &&\overset{!}{=} 0 \ (3)\\
H_{\lambda_1} &= x^2 + y^2 - 2 &&\overset{!}{=} 0 \ (4)\\
H_{\lambda_2} &= x + z - 1 &&\overset{!}{=} 0 \ (5)
\end{aligned}$$

(3) $\implies \lambda_2 = -1 \overset{(1)}{\implies} 2\lambda_1 x = 0$; (2) $\implies \lambda_1 \neq 0 \implies x = 0 \overset{(5)}{\implies} z = 1$; (4) $\implies y = \pm\sqrt{2}$

11.2 $\implies a, b \in \{(0, \sqrt{2}, 1), (0, -\sqrt{2}, 1)\}$

$f(0, \sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2} = \max f(T)$; $f(0, -\sqrt{2}, 1) = 1 - \sqrt{2} = \min f(T)$

Anwendung Sei A eine reelle, symmetrische $(n \times n)$-Matrix. Beh: A besitzt einen reellen EW.

Beweis
$f(x) := x \cdot (Ax) = Q_A(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, $T := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \partial U_1(0)$ ist beschränkt und abgeschlossen.

$\varphi(x) := \|x\|^2 - 1 = x \cdot x - 1$; $\varphi'(x) = 2x,\ f'(x) = 2Ax$.

3.3 $\implies \exists x_0 \in T : f(x_0) = \max f(T)$; $\varphi'(x) = 2(x_1, \dots, x_n)$; $x_0 \in T \implies$ Rang $\varphi'(x_0) = 1$ $(= p)$

11.2 $\implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : H'(x_0, \lambda_0) = 0$; $h(x, \lambda) = f(x) + \lambda\varphi(x)$; $H'(x, \lambda) = 2Ax + 2\lambda x$

$\implies 0 = 2(Ax_0 + \lambda_0 x_0) \implies Ax_0 = (-\lambda_0)x_0,\ x_0 \neq 0 \implies -\lambda_0$ ist ein EW von A. ■

12. Wege im $\mathbb{R}^n$

Definition

(1) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei stetig. Dann heißt γ ein **Weg** im $\mathbb{R}^n$

(2) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. $\Gamma_\gamma := \gamma([a,b])$ heißt der zu γ gehörende **Bogen**, $\Gamma_\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$. 3.3 $\implies$ Γ_γ ist beschränkt und abgeschlossen. $\gamma(a)$ heißt der **Anfangspunkt** von γ, $\gamma(b)$ heißt der **Endpunkt** von γ. $[a,b]$ heißt **Parameterintervall** von γ.
γ heißt **geschlossen** $:\iff$ $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(3) $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, definiert durch $\gamma^-(t) := \gamma(b+a-t)$ heißt der zu γ **inverse Weg**. Beachte: $\gamma^- \neq \gamma$, aber $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma^-}$.

Beispiele:

(1) Sei $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) := x_0 + t(y_0 - x_0)$, $t \in [0,1]$. $\Gamma_\gamma = S[x_0, y_0]$

(2) Sei $r > 0$ und $\gamma(t) := (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$
$\Gamma_\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\} = \partial U_r(0)$
$\tilde{\gamma}(t) := (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 4\pi]$. $\tilde{\gamma} \neq \gamma$, aber $\Gamma_{\tilde{\gamma}} = \Gamma_\gamma$.

(3) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\gamma(t) := (t, f(t)) \quad (t \in [a,b])$. Dann: $\Gamma_\gamma =$ Graph von f.

Erinnerung: $\mathfrak{Z}$ ist die Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$

Definition
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Sei $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$.

$$L(\gamma, Z) := \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$$

Übung: Sind $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$ und gilt $Z_1 \subseteq Z_2 \implies L(\gamma, Z_1) \leq L(\gamma, Z_2)$

γ heißt **rektifizierbar** (rb) $:\iff \exists M \geq 0 : L(\gamma, Z) \leq M \ \forall Z \in \mathfrak{Z}$. In diesem Fall heißt $L(\gamma) := \sup\{L(\gamma, Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$ die **Länge** von γ.

Ist $n = 1$, so gilt: γ ist rektifizierbar $\iff \gamma \in \mathrm{BV}[a,b]$. In diesem Fall: $L(\gamma) = V_\gamma([a,b])$.

Satz 12.1 (Rektifizierbarkeit und Beschränkte Variation)
Sei $\gamma = (\eta_1, \dots, \eta_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. γ ist rektifizierbar $\iff \eta_1, \dots, \eta_n \in \mathrm{BV}[a,b]$.

Beweis
Sei $Z = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathfrak{Z}$ und $J = \{1, \dots, n\}$.
$|\eta_j(t_k) - \eta_j(t_{k-1})| \overset{1.7}{\leq} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \overset{1.7}{\leq} \sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu(t_k) - \eta_\nu(t_{k-1})\|$. Summation über $k \implies$ $V_{\eta_j} \leq L(\gamma, Z) \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu(t_k) - \eta_\nu(t_{k-1})| = \sum_{\nu=1}^{n} V_{\eta_\nu}(Z) \implies$ Behauptung ■

Übung: γ ist rektifizierbar $\iff$ γ^- ist rektifizierbar. In diesem Fall: $L(\gamma) = L(\gamma^-)$

Summe von Wegen: Gegeben: $a_0, a_1, \dots a_l \in \mathbb{R}$, $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_l$ und Wege $\gamma_k : [a_{k-1}, a_k] \to \mathbb{R}^n$ $(k = 1, \dots, l)$ mit : $\gamma_k(a_k) = \gamma_{k+1}(a_k)$ $(k = 1, \dots, l-1)$. Definiere $\gamma : [a_0, a_l] \to \mathbb{R}^n$ durch $\gamma(t) := \gamma_k(t)$, falls $t \in [a_{k-1}, a_k]$. γ ist ein Weg im $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma_1} \cup \Gamma_{\gamma_2} \cup \dots \cup \Gamma_{\gamma_l}$. γ heißt die Summe der Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ und wird mit. $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_l$ bezeichnet.

Bemerkung: Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$ und $\gamma_k := \gamma_{|[t_{k-1}, t_k]}$ $(k = 1, \dots, m)$ $\implies$ $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$. Aus Analysis I, 25.1(7) und 12.1 folgt:

Satz 12.2 (Summe von Wegen)
Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$, so gilt: γ ist rektifizierbar $\iff$ $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ sind rektifizierbar. In diesem Fall: $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_m)$

Definition
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg. Sei $t \in (a, b]$. Dann: $\gamma_{|[a,t]}$ ist rektifizierbar (12.2).

$$s(t) := \begin{cases} L(\gamma_{|[a,t]}), & \text{falls } t \in (a, b] \\ 0, & \text{falls } t = a \end{cases}$$

heißt die zu γ gehörende **Weglängenfunktion**.

Satz 12.3 (Eigenschaften der Weglängenfunktion)
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg. Dann:

(1) $s \in C[a, b]$

(2) s ist wachsend.

Beweis

(1) **In der großen Übung**

(2) Sei $t_1, t_2 \in [a, b]$ und $t_1 < t_2$. $\gamma_1 := \gamma_{|[a,t_1]}$, $\gamma_2 := \gamma_{|[t_1,t_2]}$, $\gamma_3 := \gamma_{|[a,t_2]}$. Dann $\gamma_3 = \gamma_1 \oplus \gamma_2$. 12.2 $\implies$ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind rektifizierbar und $\underbrace{L(\gamma_3)}_{=s(t_2)} = \underbrace{L(\gamma_1)}_{s(t_1)} + \underbrace{L(\gamma_2)}_{\geq 0} \implies s(t_2) \geq s(t_1)$. ∎

Satz 12.4 (Rechenregeln für Wegintegrale)
Sei $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $f_1, \dots, f_n \in R[a, b]$.

$$\int_a^b f(t)dt := \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt \right) \quad (\in \mathbb{R}^n)$$

Dann:

(1)
$$x \cdot \int_a^b f(t)dt = \int_a^b (x \cdot f(t))dt \;\forall x \in \mathbb{R}^n$$

(2)
$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$$

Beweis

(1) Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \implies$
$x \cdot \int_a^b f(t)dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_a^b f_j(t)dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n x_j f_j(t)dt \right) = \int_a^b (x \cdot f(t))\, dt$

(2) $y := \int_a^b f(t)dt$. O.B.d.A: $y \neq 0$. $x := \frac{1}{\|y\|}y \implies \|x\| = 1, y = \|y\|x$. $\|y\|^2 = y \cdot y = \|y\|(x \cdot y) = \|y\| \left(x \cdot \int_a^b f(t)dt \right) = \|y\| \int_a^b (x \cdot f(t))\, dt \leq \|y\| \int_a^b \underbrace{|x \cdot f(t)|}_{\leq \|x\| \|f(t)\| = \|f(t)\|} dt \leq \|y\| \int_a^b \|f(t)\|dt$ ■

Satz 12.5 (Eigenschaften stetig differenzierbarer Wege)
$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sei ein stetig differenzierbarer Weg. Dann:

(1) γ ist rektifizierbar

(2) Ist s die zu γ gehörende Weglängenfunktion, so ist $s \in C^1[a, b]$ und $s'(t) = \|\gamma'(t)\| \;\forall t \in [a, b]$

(3) $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$

Beweis

(1) $\gamma = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\eta_j \in C^1[a, b] \xRightarrow{\text{A1,25.1}} \eta_j \in \mathrm{BV}[a, b] \xRightarrow{\text{12.1}} \gamma$ ist rektifizierbar.

(2) Sei $t_0 \in [a, b)$. Wir zeigen:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \to \|\gamma'(t_0)\| \; (t \to t_0{+}0). \text{ (analog zeigt man :} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \to \|\gamma'(t_0)\| \; (t \to t_0{-}0)).$$

Sei $t \in (t_0, b]$; $\gamma_1 := \gamma_{|_{[a,t_0]}}, \gamma_2 := \gamma_{|_{[t_0,t]}}, \gamma_3 := \gamma_{|_{[a,t]}}$. Dann: $\gamma_3 = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ und $\underbrace{L(\gamma_3)}_{=s(t)} = \underbrace{L(\gamma_1)}_{=s(t_0)} + L(\gamma_2) \implies s(t) - s(t_0) = L(\gamma_2)$ (I).

$\tilde{Z} := \{t_0, t\}$ ist eine Zerlegung von $[t_0, t] \implies \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| = L(\gamma_2, \tilde{Z}) \leq L(\gamma_2)$

Definition: $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $F(t) = \displaystyle\int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\mathrm{d}\tau$. 2.Hauptsatz der Differentialund Integralrechnung $\implies$ F ist differenzierbar und $F'(t) = \|\gamma'(t)\|$ $\forall t \in [a,b]$. Sei $Z = \{\tau_0, \dots, \tau_m\}$ eine beliebige Zerlegung von $[t_0, t]$.

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \gamma'(\tau)\mathrm{d}\tau = \left(\cdots, \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \eta_k'(\tau)\mathrm{d}\tau, \cdots\right) \overset{\text{A1}}{=} (\cdots, \eta_k(\tau_j) - \eta_k(\tau_{j-1}), \cdots) = \gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1})$$

$\implies \|\gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1})\| \overset{12.4}{\leq} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \|\gamma'(\tau)\|\mathrm{d}\tau$. Summation $\implies L(\gamma_2, Z) \leq \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tau)\|\mathrm{d}\tau = F(t) - F(t_0) \implies L(\gamma_2) \leq F(t) - F(t_0)$ (III).

$(I), (II), (III) \implies \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \overset{(II)}{\leq} L(\gamma_2) \overset{(I)}{=} s(t) - s(t_0) \overset{(III)}{\leq} F(t) - F(t_0)$

$$\implies \underbrace{\frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}}_{\overset{t \to t_0}{\to} \|\gamma'(t_0)\|} \leq \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \leq \underbrace{\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}}_{\overset{t \to t_0}{\to} F'(t_0) = \|\gamma'(t_0)\|}$$

(3) $L(\gamma) = s(b) = s(b) - s(a) \overset{AI}{=} \int_a^b s'(t)\mathrm{d}t \overset{(2)}{=} \int_a^b \|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$ ■

Beispiele:

(1) $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \gamma(t) := x_0 + t(y_0 - x_0)$ $(t \in [0,1])$. $\gamma'(t) = y_0 - x_0 \implies L(\gamma) = \int_0^1 \|y_0 - x_0\|\mathrm{d}t = \|y_0 - x_0\|$.

(2) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\gamma(t) := (t, f(t)), t \in [a,b]$. γ ist ein Weg im $\mathbb{R}^2$. γ ist rektifizierbar $\iff$ $f \in \mathrm{BV}[a,b]$. Γ_γ =Graph von f. Jetzt sei $f \in C^1[a,b] \overset{12.5}{\implies} L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t = \int_a^b (1 + f'(t)^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$.

(3) $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$ $(t \in [0, 2\pi])$. $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$. $\|\gamma'(t)\| = 1$ $\forall t \in [0, 2\pi] \overset{12.5}{\implies} s'(t) = 1$ $\forall t \in [0, 2\pi] \implies s(t) = t$ $\forall t \in [0, 2\pi]$ (**Bogenmaß**). **Winkelmaß**: $\varphi := \frac{180}{\pi}t$. $L(\gamma) = 2\pi$.

Definition
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei ein Weg.

(1) γ heißt **stückweise stetig differenzierbar** $:\iff \exists z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$ mit: $\gamma_{|[t_{k-1}, t_k]}$ sind stetig differenzierbar $(k = 1, \dots, m)$ $\iff$ $\exists$ stetig differenzierbare Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_l$: $\gamma = \gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_l$.

(2) γ heißt **glatt** $:\iff$ γ ist stetig differenzierbar und $\|\gamma'(t)\| > 0$ $\forall t \in [a,b]$.

(3) γ heißt **stückweise glatt** $:\iff$ $\exists$ glatte Wege $\gamma = \gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_l$

Aus 12.2 und 12.5 folgt:

Satz 12.6 (Rektifizierbarkeit von Wegsummen)
Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_l$ stückweise stetig differenzierbar, mit stetig differenzierbaren Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_l \implies \gamma$ ist rektifizierbar und $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_l)$.

Definition
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. γ heißt eine **Parameterdarstellung** von Γ_γ.

Beispiele:

(1) $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \gamma_1(t) := x_0 + t(y_0 - x_0)$ $t \in [0,1]$, $\gamma_2(t) := \gamma_1^-(t)$ $t \in [0,1]$, $\gamma_3(t) := x_0 + 7t(y_0 - x_0)$ $t \in [0, \frac{1}{7}]$. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind Parameterdarstellungen von $S[x_0, y_0]$.

(2) $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $(t \in [0, 2\pi]), \gamma_2(t) := (\cos t, \sin t), (t \in [0, 4\pi])$. γ_1, γ_2 sind Parameterdarstellungen von $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Definition
$\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ seien Wege.

γ_1 und γ_2 heißen **äquivalent**, in Zeichen $\gamma_1 \sim \gamma_2 :\iff \exists h : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ stetig und streng wachsend, $h(a) = \alpha, h(b) = \beta$ und $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))$ $\forall t \in [a,b]$ (also $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$). h heißt eine **Parametertransformation** (PTF). Analysis 1 $\implies h([a,b]) = [\alpha, \beta] \implies \Gamma_{\gamma_1} = \Gamma_{\gamma_2}$. Es gilt: $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h^{-1} \implies \gamma_2 \sim \gamma_1$. „$\sim$“ ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiele:

(1) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ seien wie in obigem Beispiel (1). $\gamma_1 \sim \gamma_3, \gamma_1 \sim \gamma_2$.

(2) γ_1, γ_2 seien wie in obigem Beispiel (2). $\gamma_1 \nsim \gamma_2$, denn $L(\gamma_1) = 2\pi \neq 4\pi = L(\gamma_2)$

Satz 12.7 (Eigenschaften der Parametertransformation)
$\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ seien äquivalente Wege und $h : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ eine Parametertransformation.

(1) γ_1 ist rektifizierbar $\iff \gamma_2$ ist rektifizierbar. In diesem Falle: $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$

(2) Sind γ_1 und γ_2 glatt $\implies h \in C^1[a,b]$ und $h' > 0$.

Beweis

(2) **In den großen Übungen.**

(1) Es genügt zu zeigen: Aus γ_2 rektifizierbar folgt: γ_1 ist rektifizierbar und $L(\gamma_1) \leq L(\gamma_2)$. Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_m\} \in \mathfrak{Z} \implies \tilde{Z} := \{h(t_0), \ldots, h(t_m)\}$ ist eine Zerlegung von $[\alpha, \beta]$.

$$L(\gamma_1, Z) = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma_2(h(t_j)) - \gamma_2(h(t_{j-1}))\| = L(\gamma_2, \tilde{Z}) \leq L(\gamma_2)$$

$\implies \gamma_1$ ist rektifizierbar und $L(\gamma_1) \leq L(\gamma_2)$. ■

Weglänge als Parameter Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg. 12.5 $\implies \gamma$ ist rb. $L := L(\gamma)$. 12.5 $\implies s \in C^1[a,b]$ und $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ $\forall t \in [a,b]$. s ist also streng wachsend. Dann gilt: $s([a,b]) = [0, L]$, $s^{-1} : [0, L] \to [a,b]$ ist streng wachsend und stetig db. $(s^{-1})'(\sigma) = \frac{1}{s'(t)}$ für $\sigma \in [0, L]$, $s(t) = \sigma$.

Definition
$\tilde{\gamma}[0,L] \to \mathbb{R}^n$ durch $\tilde{\gamma}(\sigma) := \gamma(s^{-1}(\sigma))$, also $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$; $\tilde{\gamma}$ ist ein Weg im $\mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma} \sim \gamma$; $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\tilde{\gamma}}$.

12.7 $\Longrightarrow$ $\tilde{\gamma}$ ist rb, $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) = L$, $\tilde{\gamma}$ ist stetig db. $\tilde{\gamma}$ heißt Parameterdarstellung von Γ_γ mit der Weglänge als Parameter. Warum?

Darum: Sei $\tilde{s}$ die zu $\tilde{\gamma}$ gehörende Weglängenfunktion. $\forall \sigma \in [0,L] : \tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma(s^{-1}(\sigma))$. Sei $\sigma \in [0,L],\ t := s^{-1}(\sigma) \in [a,b],\ s(t) = \sigma$.

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = (s^{-1})'(\sigma) \cdot \gamma'(s^{-1}(\sigma)) = \tfrac{1}{s'(t)}\gamma'(t) \overset{12.5}{=} \tfrac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t) \implies \|\gamma'(\sigma)\| = 1 \ (\implies \tilde{\gamma} \text{ ist glatt}).$$

$$\tilde{s}'(\gamma) \overset{12.5}{=} \|\gamma'(\sigma)\| = 1 \xRightarrow{\tilde{s}(0)=0} \tilde{s}(\sigma) = \sigma.$$

Also: $\|\tilde{\gamma}'(\sigma)\| = 1,\ \tilde{s}(\sigma) = \sigma\ \forall \sigma \in [0,L]$.

Beispiel
$\gamma(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t),\ t \in [0,1]$; γ ist stetig db; Nachrechnen: $\|\gamma'(t)\| = e^t\ \forall t \in [0,1] \implies \gamma$ ist glatt.

$s'(t) \overset{12.5}{=} \|\gamma'(t)\| = e^t \implies s(t) = e^t + c \implies 0 = s(0) = 1 + c \implies c = -1,\ s(t) = e^t - 1\ (t \in [0,1]) \implies L = L(\gamma) = s(1) = e - 1$. $e^t = 1 + s(t),\ t = \log(1 + s(t))$.

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma(s^{-1}(\sigma)) = \gamma(\log(1+\sigma)) = \tfrac{1+\sigma}{\sqrt{2}}(\cos(\log(1+\sigma)), \sin(\log(1+\sigma))),\ \sigma \in [0, e-1].$$

13. Wegintegrale

In diesem Paragraphen seien alle vorkommenden Wege stets stückweise stetig differenzierbar.

Definition
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $\gamma = (\eta_1, \dots, \eta_n), \Gamma := \Gamma_\gamma$. $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ stetig und $f = (f_1, \dots, f_n) : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ stetig.

(1) Für $j \in \{1, \dots, n\} : \int_\gamma g(x) \, \mathrm{d}x_j := \int_a^b g(\gamma(t)) \cdot \eta_j'(t) \, \mathrm{d}t$

(2)

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x &:= \int_\gamma f_1(x) \, \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n(x) \, \mathrm{d}x_n \\ &:= \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma f_j(x) \, \mathrm{d}x_j\end{aligned}$$

Es ist $\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t$ und heißt das **Wegintegral von f längs** γ.

Beispiel
$f(x,y,z) := (z,y,x), \ \gamma(t) = (t, t^2, 3t), \ t \in [0,1]$. $f(\gamma(t)) = (3t, t^2, t), \ \gamma'(t) = (1, 2t, 3), \ f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 3t + 2t^3 + 3t = 6t + 2t^3$.

$\int_\gamma f(x,y,z) \cdot d(x,y,z) = \int_0^1 (6t + 2t^3) dt = \frac{7}{2}$.

Satz 13.1 (Rechnen mit Wegintegralen)
γ, Γ, f seien wie oben, $g : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ sei stetig, $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ sei rektifizierbar und $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.

(1) $\displaystyle\int_\gamma (\xi f(x) + \eta g(x)) \cdot dx = \xi \int_\gamma f(x) \cdot dx + \eta \int_\gamma g(x) \cdot dx$

(2) Ist $\gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \displaystyle\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{\gamma^{(1)}} f(x) \cdot dx + \int_{\gamma^{(2)}} f(x) \cdot dx$

(3) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx = -\int_\gamma f(x) \cdot dx$

(4) $\displaystyle\left| \int_\gamma f(x) \cdot dx \right| \leq L(\gamma) \cdot \max\{\|f(x)\| : x \in \Gamma\}$

(5) Ist $\hat{\gamma} \sim \gamma \implies \displaystyle\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{\hat{\gamma}} f(x) \cdot dx.$

Beweis

(1) klar

(2) Ana I, 26.1(3)

(3) nur für γ stetig differenzierbar. $\gamma^-(t) = \gamma(b+a-t),\ t \in [a,b]$.

$\int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(b+a-t)) \cdot \gamma'(b+a-t)(-1)dt =$ (subst. $\tau = b+a-t,\ d\tau = dt$) $= \int_b^a f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)d\tau = -\int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)d\tau = -\int_\gamma f(x) \cdot dx$.

(4) Übung

(5) Sei $\hat{\gamma} = \gamma \circ h,\ h : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ stetig und streng wachsend. $h(\alpha) = a,\ h(\beta) = b$. Nur für γ und h stetig db. Dann ist $\hat{\gamma}$ stetig db.

$\int_{\hat{\gamma}} f(x) \cdot dx = \int_\alpha^\beta f(\gamma(h(t))) \cdot \gamma'(h(t)) \cdot h'(t)dt =$ (subst. $\tau = h(t),\ d\tau = h'(t)dt$) $= \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)d\tau = \int_\gamma f(x) \cdot dx$. ■

Definition

γ, Γ seien wie immer in diesem Paragraphen. s sei die zu γ gehörende Weglängenfunktion und $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ stetig. 12.4 $\implies$ s ist wachsend $\xrightarrow{\text{Ana I}}$ $s \in BV[a,b]$; $g \circ \gamma$ stetig $\xrightarrow{\text{Ana I, 26.6}}$ $g \circ \gamma \in R_s[a,b]$.

$$\int_\gamma g(x)ds := \int_a^b g(\gamma(t))ds(t)$$

Integral bzgl. der Weglänge.

Satz 13.2 (Rechnen mit Integralen bzgl. der Weglänge)
Seien γ, g wie oben.

(1) $\displaystyle\int_{\gamma^-} g(x)ds = \int_\gamma g(x)ds$

(2) Ist $\gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \displaystyle\int_\gamma g(x)ds = \int_{\gamma^{(1)}} g(x)ds + \int_{\gamma^{(2)}} g(x)ds.$

(3) Ist γ stetig db $\implies \boxed{\displaystyle\int_\gamma g(x)ds = \int_a^b g(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt}$

Beispiel

$g(x,y) = (1+x^2+3y)^{1/2},\ \gamma(t) = (t,t^2),\ t \in [0,1]$.

$g(\gamma(t)) = (1+t^2+3t^2)^{1/2} = (1+4t^2)^{1/2},\ \gamma'(t) = (1,2t),\ \|\gamma'(t)\| = (1+4t^2)^{1/2} \implies \int_\gamma g(x,y)ds = \int_0^1 (1+4t^2)dt = \frac{7}{3}$

Gegeben: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ rektifizierbare Wege, $\gamma_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2), \gamma_2(b_2) = \gamma_3(a_3), \ldots, \gamma_{m-1}(b_{m-1}) = \gamma_m(a_m)$. $\Gamma := \Gamma_{\gamma_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\gamma_m}$.

$\mathrm{AH}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) := \{\gamma : \gamma$ ist ein rektifizierbarer Weg im $\mathbb{R}^n$ mit: $\Gamma_\gamma = \Gamma$, $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_m)$ und $\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx + \cdots + \int_{\gamma_m} f(x) \cdot dx$ für jedes stetige $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n\}$.

Ist $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, so sagt man γ entsteht durch **Aneinanderhängen** der Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$.

Satz 13.3 (Stetige Differenzierbarekeit der Aneinanderhängung)
$\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ seien wie oben. Dann: $\mathrm{AH}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \neq \emptyset$.
Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ stetig differenzierbar, so existiert ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$.

Beweis
O.B.d.A: $m = 2$.

Def. $h : [b_1, c] \to [a_2, b_2]$ linear wie folgt: $h(x) = px + q$, $h(b_1) = a_2$, $h(c) = b_2$. $\hat{\gamma}_2 := \gamma_2 \circ h$. Dann: $\gamma_2 \sim \hat{\gamma}_2$. $\gamma := \gamma_1 \oplus \hat{\gamma}_2$. 12.2, 12.7, 13.2 $\Longrightarrow$ $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$. ■

Beispiel
In allen Beispielen sei $f(x, y) = (y, x - y)$ und $t \in [0, 1]$.

(1) $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $\gamma_2(t) = (1, t)$.

Sei $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$. Anfangspunkt von γ ist (0,0), Endpunkt von γ ist (1,1). Nachrechnen: $\int_{\gamma_1} f(x, y) \cdot d(x, y) = 0$, $\int_{\gamma_2} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$. Also: $\int_\gamma f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$

(2) $\gamma_1(t) = (0, t)$, $\gamma_2(t) = (t, 1)$.

Sei $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$, Anfangspunkt von γ ist (0,0), Endpunkt von γ ist (1,1). Nachrechnen: $\int_\gamma f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$

(3) $\gamma(t) = (t, t^3)$. Anfangspunkt von γ ist (0,0), Endpunkt von γ ist (1,1). Nachrechnen: $\int_\gamma f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$

14. Stammfunktionen

In diesem Paragraphen sei stets: $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^n$, G ein Gebiet und $f = (f_1, \dots, f_n) : G \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Definition
Eine Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}$ heißt eine **Stammfunktion (SF) von f auf G** $:\iff$ φ ist auf G partiell differenzierbar und $\operatorname{grad}\varphi = f$ auf G. Also: $\varphi_{x_j} = f_j$ auf G $(j = 1, \dots, n)$.

Bemerkung:

(1) Ist φ eine Stammfunktion von f auf G $\implies$ $\operatorname{grad}\varphi = f$ $\implies$ $\varphi \in C^1(G, \mathbb{R})$ $\overset{5.3}{\implies}$ φ ist auf G differenzierbar und $\varphi' = f$ auf G.

(2) Sind φ_1, φ_2 Stammfunktionen von f auf G $\overset{(1)}{\implies}$ $\varphi_1' = \varphi_2'$ auf G $\overset{6.2}{\implies}$ $\exists c \in \mathbb{R} : \varphi_1 = \varphi_2 + c$ auf G

(3) Ist $n = 1$ $\implies$ G ist ein offenes Intervall. AI, 23.14 $\implies$ jedes stetige $f : G \to \mathbb{R}$ besitzt auf G eine Stammfunktion! Im Falle $n \geq 2$ ist dies nicht so.

Beispiele:

(1) $G = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, -x)$.

Annahme: f besitzt auf $\mathbb{R}^2$ die Stammfunktion φ. Dann: $\varphi_x = y$, $\varphi_y = -x$ auf G $\implies$ $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $\varphi_{xy} = 1 \neq -1 = \varphi_{yx}$. Widerspruch zu 4.1. Also: f besitzt auf $\mathbb{R}^2$ keine Stammfunktion.

(2) $G = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x - y)$.

Ansatz für eine Stammfunktion φ von f: $\varphi_x = y$ $\implies$ $\varphi = xy + c(y)$, c differenzierbar, $\implies$ $\varphi_y \overset{!}{=} x + c'(y) = x - y$ $\implies$ $c'(y) = -y$, etwa $c(y) = -\frac{1}{2}y^2$. Also: $\varphi(x, y) = xy - \frac{1}{2}y^2$. Probe: $\varphi_x = y$, $\varphi_y = x - y$, also: $\operatorname{grad}\varphi = f$. φ ist also eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{R}^2$.

Satz 14.1 (Hauptsatz der mehrdimensionalen Integralrechnung)
f besitzt auf G die Stammfunktion φ; $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit $\Gamma_\gamma \subseteq G$. Dann:

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \varphi\left(\gamma(b)\right) - \varphi\left(\gamma(a)\right)$$

Das heißt: $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab.

Ist γ geschlossen, das heißt $\gamma(a) = \gamma(b)$, dann gilt $\int_\gamma f(x) \cdot dx = 0$.

Beweis
O.B.d.A.: γ ist stetig differenzierbar. $\Phi(t) := \varphi(\gamma(t))$, $t \in [a,b]$. Φ ist stetig differenzierbar und $\Phi'(t) = \varphi'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma(t)$ Dann: $\int_\gamma f(x) \cdot dx \overset{13.1}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \Phi'(t) dt \overset{\text{AI}}{=} \Phi(b) - \Phi(a) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$. ■

Hilfssatz 14.2
Es seien $x_0, y_0 \in G$. Dann existiert ein stückweise stetig differenzierbarer Weg γ mit: $\Gamma_\gamma \subseteq G$ und Anfangspunkt von $\gamma = x_0$ und Endpunkt von $\gamma = y_0$.

Beweis
G Gebiet $\implies \exists z_0, z_1, \ldots, z_m \in G : S[z_0, \ldots, z_m] \subseteq G, z_0 = x_0, z_m = y_0$.

$\gamma_j(t) := z_{j-1} + t(z_j - z_{j-1})$, $(t \in [0,1])$, $(j = 1, \ldots, n)$. Dann:$\Gamma_{\gamma_j} = S[z_{j-1}, z_j] \implies \Gamma_{\gamma_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\gamma_m} = S[z_0, \ldots, z_m] \subseteq G$. 13.4 $\implies \exists \gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ stückweise stetig differenzierbar $\implies \Gamma_\gamma = S[z_0, \ldots, z_m] \subseteq G$. ■

Definition
$\int f(x) \cdot \mathrm{d}x$ heißt **in G wegunabhängig** (wu) $:\iff$ für je zwei Punkte $x_0, y_0 \in G$ gilt: für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma_\gamma \subseteq G$, $\gamma(a) = x_0$ und $\gamma(b) = y_0$ hat das Integral $\displaystyle\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x$ stets denselben Wert. In diesem Fall: $\displaystyle\int_{x_0}^{y_0} f(x) \cdot \mathrm{d}x := \int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x$.

14.1 lautet dann: besitzt f auf G die Stammfunktion $\varphi \implies \displaystyle\int f(x) \cdot \mathrm{d}x$ ist in G wegunabhängig und $\int_{x_0}^{y_0} = \varphi(y_0) - \varphi(x_0)$ (Verallgemeinerung von Analysis 1, 23.5).

Satz 14.3 (Wegunabhängigkeit, Existenz von Stammfunktionen)
f besitzt auf G eine Stammfunktion $\iff \int f(x) \cdot \mathrm{d}x$ ist in G wegunabhängig.
In diesem Fall: ist $x_0 \in G$ und $\varphi : G \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$\varphi(z) = \int_{x_0}^{z} f(x) \cdot \mathrm{d}x \ (z \in G) \tag{$*$}$$

Dann ist φ eine Stammfunktion von f auf G.

Beweis
„ $\implies$ “: 14.1 „ $\impliedby$ “: Sei $x_0 \in G$ und φ wie in $(*)$. Zu zeigen: φ ist auf G differenzierbar und $\varphi' = f$ auf G. Sei $z_0 \in G, h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$ und $\|h\|$ so klein, dass $z_0 + th \in G \ \forall t \in [0,1]$. $\gamma(t) := z_0 + th \ (t \in [0,1]), \Gamma_\gamma = s[z_0, z_0 + h] \subseteq G$. $\rho(h) := \frac{1}{\|h\|}(\varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0) - f(z_0) \cdot h)$. Zu zeigen: $\rho(h) \to 0 \ (h \to 0)$. 14.2 $\implies$ es existieren stückweise stetig differenzierbare Wege γ_1, γ_2 mit: $\Gamma_{\gamma_1}, \Gamma_{\gamma_2} \subseteq G$. Anfangspunkt von $\gamma_1 = x_0$ =Anfangspunkt von γ_2. Endpunkt von $\gamma_1 = z_0$, Endpunkt von $\gamma_2 = z_0 + h$. Sei $\gamma_3 \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma)$ stückweise stetig differenzierbar (13.4!). Dann:

$$\underbrace{\int_{\gamma_3} f(x) \cdot \mathrm{d}x}_{=\varphi(z_0+h)} = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(x) \cdot \mathrm{d}x}_{=\varphi(z_0)} + \int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

$\displaystyle\int f(x) \cdot \mathrm{d}x$ ist wegunabhängig in $G \implies$

$$\int_{\gamma_3} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{\gamma_2} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \varphi(z_0 + h) \implies \varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0) = \int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Es ist:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z_0)\cdot \mathrm{d}x &= \int_0^1 f(z_0)\cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{=h}\mathrm{d}t = f(z_0)\cdot h\\ \implies \rho(h) &= \frac{1}{\|h\|}\int_\gamma (f(x)-f(z_0))\mathrm{d}x\\ \implies |\rho(h)| &= \frac{1}{\|h\|}\left|\int_\gamma f(x)-f(z_0)\mathrm{d}x\right|\\ &\leq \frac{1}{\|h\|}\underbrace{L(\gamma)}_{=\|h\|}\underbrace{\max\{\|f(x)-f(z_0)\| : x\in\Gamma_\gamma\}}_{=\|f(x_n)-f(z_0)\|}\end{aligned}$$

wobei $x_n \in \Gamma_\gamma = S[z_0, z_0+h] \implies |\rho(h)| \leq \|f(x_n)-f(z_0)\|$. Für $h \to 0 : x_n \to z_0 \xRightarrow{\text{f stetig}} \|f(x_n)-f(z_0)\| \to 0 \implies \rho(h) \to 0$. ■

Satz 14.4 (Integrabilitätsbedingungen)
Sei $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Besitzt f auf G die Stammfunktion $\varphi \implies$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \text{ auf } G \ (j,k = 1,\dots,n)$$

(**Integrabilitätsbedingungen** (IB)). Warnung: Die Umkehrung von 14.4 gilt im Allgemeinen **nicht** (→ Übungen!).

Beweis
Sei φ eine Stammfunktion von f auf $G \implies \varphi$ ist differenzierbar auf G und $\varphi_{x_j} = f_j$ auf G $(j = 1,\dots,n)$. $f \in C^1(G,\mathbb{R}^n) \implies \varphi \in C^2(G,\mathbb{R})$

$$\implies \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \varphi_{x_j x_k} \overset{4.7}{=} \varphi_{x_k x_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \text{ auf G.}$$

■

Definition
Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$. M heißt **sternförmig** $:\iff \exists x_0 \in M : S[x_0, x] \subseteq M \ \forall x \in M$.
Beachte:

(1) Ist M konvex $\implies M$ ist sternförmig

(2) Ist M offen und sternförmig $\implies M$ ist ein Gebiet

Satz 14.5 (Kriterium zur Existenz von Stammfunktionen)
Sei G sternförmig und $f \in C^1(G,\mathbb{R}^n)$. Dann: f besitzt auf G eine Stammfunktion $:\iff f$ erfüllt auf G die Integrabilitätsbedingungen

Beweis

„$\Longrightarrow$“: 14.1 „$\Longleftarrow$“: G sternförmig $\Longrightarrow \exists x_0 \in G : S[x_0, x] \subseteq G \; \forall x \in G$. OBdA: $x_0 = 0$.

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ sei $\gamma_x(t) = tx, t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &:= \int_{\gamma_x} f(z) \cdot \mathrm{d}z \; (x \in G) \\ &= \int_0^1 f(tx) \cdot x \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (f_1(tx) \cdot x_1 + f_2(tx) \cdot x_2 + \ldots + f_n(tx) \cdot x_n) \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Zu zeigen: φ ist auf G partiell differenzierbar nach x_j und $\varphi_{x_j} = f_j$ $(j = 1, \dots, n)$. OBdA: $j = 1$. Später (in 21.3) zeigen wir: φ ist partiell differenzierbar nach x_1 und:

$$\varphi_{x_1}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f_1(tx) x_1 + \ldots + f_n(tx) \cdot x_n) \mathrm{d}t$$

Für $k = 1, \dots, n: \; g_k(x) = f_k(tx) \cdot x_k$.
$k = 1: \; g_1(x) = f_1(tx) x_1 \Longrightarrow \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) = f_1(tx) + t \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx) x_1$
$k \geq 2: \; g_k(x) = f_k(tx) x_k \Longrightarrow \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x) = t \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(tx) x_k \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\varphi_{x_1}(x) &= \int_0^1 (f_1(tx) + t(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx) x_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(tx) x_n)) \mathrm{d}t \\ &\overset{\text{IB}}{=} \int_0^1 (f_1(tx) + t(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx) x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx) x_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(tx) x_n)) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (f_1(tx) + t f_1'(tx) \cdot x) \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Sei $x \in G$ (fest), $h(t) := t \cdot f_1(tx)$ $(t \in [0,1])$. h ist stetig differenzierbar und $h'(t) = f_1(tx) + t f_1'(tx) \cdot x \Longrightarrow \varphi_{x_1}(x) = \int_0^1 h'(t) \mathrm{d}t \overset{\text{A1}}{=} h(1) - h(0) = f_1(x)$. ■

15. Vorgriff auf Analysis III

In Analysis III werden wir für gewisse Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und gewisse Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ folgendes Integral definieren:

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x_1, \dots, x_n)\ \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)$$

In diesem Paragraphen geben wir „Kochrezepte“ an, wie man solche Integrale für spezielle Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (bzw. $A \subseteq \mathbb{R}^3$) und stetige Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ berechnen kann.

I **Der Fall** $n = 2$:

Definition
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $h_1, h_2 \in C[a, b]$ und $h_1 \leq h_2$ auf $[a, b]$.

$$A := \left\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \middle|\ x \in [a, b], h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\ \right\}$$

$$\left(A := \left\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \middle|\ y \in [a, b], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\ \right\}\right)$$

heißt **Normalbereich** bezüglich der x-Achse (y-Achse).
Übung: A ist kompakt.

Satz 15.1 (Integral über Normalbereiche im $\mathbb{R}^2$)
Sei A wie oben und $f : A \to \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\int_A f(x, y)\mathrm{d}(x, y) = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x$$

$$\left(\int_A f(x, y)\mathrm{d}(x, y) = \int_a^b \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y\right)$$

Achtung: $\int_A f(x)\mathrm{d}x$ nicht mit dem Wegintegral $\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x$ verwechseln!

Definition
Sei A ein Normalbereich bzgl. der x- oder y-Achse, so heißt:

$$|A| := \int_A 1\ \mathrm{d}(x, y)$$

der **Flächeninhalt** von A.

Beispiele:

(1) Sei A ein Normalbereich bzgl. der x-Achse und seien h_1, h_2 wie oben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|A| &= \int_A 1 \,\mathrm{d}(x,y)\\ &\overset{15.1}{=} \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} 1 \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x\\ &= \int_a^b (h_2(x) - h_1(x)) \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ist z.B. $h_1 = 0$, so folgt:

$$|A| = \int_a^b h_2(x) \,\mathrm{d}x$$

(2) Sei $A = [a,b] \times [c,d]$, dann ist A Normalbereich bezüglich der x- **und** der y-Achse. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Es folgt aus 15.1.:

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\mathrm{d}(x,y) &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x\\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y\end{aligned}$$

(3) Sei $r > 0$ und $A := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq r^2 \right\}$. Dann ist A ein Normalbereich der x-Achse mit $h_1(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$ und $h_2(x) := -\sqrt{r^2 - x^2}$ (mit $x \in [-r, r]$), und es gilt:

$$\begin{aligned}|A| &= \int_{-r}^{r} h_2(x) - h_1(x) \,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2} \,\mathrm{d}x\\ &= \pi r^2\end{aligned}$$

(4) Sei $A := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [0,1], x \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$ und $f(x,y) = xy$. Dann gilt für $h_1(x) = x$ und $h_2(x) = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}\int_A xy \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} xy \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_x^{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 \,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

Da $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \in [0,1], y^2 \leq x \leq y \right\}$ außerdem Normalbereich bzgl. der y-

Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\ \mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} xy\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{y^2}^{y}\ \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^5\ \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{6}y^5\right]_0^1 = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

II **Der Fall $n = 3$:**

Definition
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bzgl. der x- oder der y-Achse, es seien $g_1, g_2 : A \to \mathbb{R}$ stetig und $g_1 \leq g_2$ auf A.

$$B := \left\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ \middle|\ (x,y) \in A, g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\ \right\}$$

heißt ein **Normalbereich** bezüglich der x-y-Ebene. Normalbereiche bzgl der x-z- und y-z-Ebene werden analog definiert.

Satz 15.2 (Integral über Normalbereiche im $\mathbb{R}^3$)
Sei B, g_1, g_2 wie oben und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\int_B f(x,y,z)\ \mathrm{d}(x,y,z) = \int_A \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\right)\ \mathrm{d}(x,y)$$

Definition
B sei wie in 15.2.

$$\begin{aligned}|B| &:= \int_B 1\ \mathrm{d}(x,y,z) \\ &\left(= \int_A g_2(x,y) - g_1(x,y)\ \mathrm{d}(x,y)\right)\end{aligned}$$

heißt **Volumen** von B.

Beispiele:
(1) Sei $B := \overbrace{[a,b] \times [c,d]}^{:=A} \times [\alpha,\beta]$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_B f(x,y,z)\ \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_A \left(\int_\alpha^\beta f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\right)\ \mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_\alpha^\beta f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\right)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Dabei darf die Integrationsreihenfolge beliebig vertauscht werden.

(2) Sei $B := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h \right\}$ für ein $h > 0$. Dann setze $A := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 1 \right\}, g_1 = 0, g_2 = h$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |B| &= \int_A h \, \mathrm{d}(x,y) \\ &= h \int_A 1 \, \mathrm{d}(x,y) \\ &= h \cdot |A| = h\pi \end{aligned}$$

Satz 15.3 (Eigenschaften von Integralen über Normalbereiche)
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ oder $B \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f, g : B \to \mathbb{R}$ stetig. Je nach Definition von B sei $X = (x,y)$ oder $X = (x,y,z)$.

(1) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_B \alpha f(X) + \beta g(X) \, \mathrm{d}X = \alpha \int_B f(X) \, \mathrm{d}X + \beta \int_B g(X) \, \mathrm{d}X$$

(2) Es gilt die bekannte Dreiecksungleichung:

$$\left| \int_B f(X) \, \mathrm{d}X \right| \leq \int_B |f(X)| \, \mathrm{d}X \leq |B| \cdot \max\{|f(X)| : X \in B\}$$

(3) Ist $f \leq g$ auf B, so gilt:

$$\int_B f(X) \, \mathrm{d}X \leq \int_B g(X) \, \mathrm{d}X$$

16. Folgen, Reihen und Potenzreihen in $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ sind Vektorräume **über** $\mathbb{R}$ der Dimension zwei. Sie unterscheiden sich als Vektorräume über $\mathbb{R}$ nur dadurch, dass ihre Elemente mit:

$$z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \quad \text{bzw.} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

bezeichnet werden. Mit dem **komplexen Betrag** $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt:

$$|z| = \|(x, y)\|$$

Man sieht, dass alle aus der Addition, der Skalarmultiplikation und der Norm entwickelten Begriffe und Sätze aus §1 und §2 auch in $\mathbb{C}$ gelten.

Beispiel (Konvergente Folgen)
Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. (z_n) konvergiert genau dann gegen z_0, wenn gilt:

$$\begin{aligned} & |z_n - z_0| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \\ \overset{2.1}{\iff} \ & \mathrm{Re}(z_n) \overset{n\to\infty}{\to} \mathrm{Re}(z_0) \land \mathrm{Im}(z_n) \overset{n\to\infty}{\to} \mathrm{Im}(z_0) \end{aligned}$$

Außerdem ist (z_n) genau dann eine Cauchyfolge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Also nach Cauchykriterium genau dann, wenn (z_n) konvergent ist.

Satz 16.1 (Produkte und Quotienten von Folgen)
Seien $(z_n), (w_n)$ Folgen in $\mathbb{C}$ mit $z_n \overset{n\to\infty}{\to} z_0, w_n \overset{n\to\infty}{\to} w_0$.

(1) Es gilt:

$$z_n w_n \overset{n\to\infty}{\to} z_0 w_0$$

(2) Ist $z_0 \neq 0$, so existiert ein $m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m : z_n \neq 0$ und:

$$\frac{1}{z_n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{z_0}$$

Beweis
Wie in Ana I. ■

Definition
Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$, $s_n := z_1 + \cdots + z_n (n \in \mathbb{N})$. (s_n) heißt **unendliche Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ bezeichnet.
$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ heißt genau dann **konvergent** (**divergent**), wenn (s_n) konvergent (bzw. divergent) ist. Im Konvergenzfall gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n := \limsup_{n\to\infty} s_n$$

Die Definitionen und Sätze der Paragraphen 11, 12, 13 aus Ana I gelten wörtlich auch in $\mathbb{C}$, bis auf diejenigen Definitionen und Sätze, in denen die Anordnung auf $\mathbb{R}$ eine Rolle spielt (z.B. das Leibniz- und das Monotoniekriterium).

Beispiele:

(1) Sei $z \in \mathbb{C}$. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ heißt **geometrische Reihe**.
Fall 1: Ist $|z| < 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \text{ konvergiert} \\ \implies &\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ konvergiert absolut} \\ \implies &\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ konvergiert} \end{aligned}$$

Fall 2: Ist $|z| \geq 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} &|z|^n = |z^n| \overset{n\to\infty}{\not\to} 0 \\ \implies &z^n \overset{n\to\infty}{\not\to} 0 \\ \implies &\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ divergiert} \end{aligned}$$

Ist $|z| < 1$, so zeigt man wie in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

(2) Betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \text{ konvergiert} \\ \implies &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ konvergiert absolut} \end{aligned}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ definiere die (komplexe) **Exponentialfunktion** wie folgt:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(3) Wie in Beispiel (2) sieht man, dass $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergieren.
Dadurch lassen sich auch **Cosinus** und **Sinus** auf ganz $\mathbb{C}$ definieren:

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Satz 16.2 (Eigenschaften von Exponentialfunktion, Cosinus und Sinus)
Seien $z, w \in \mathbb{C}, z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt:

(1) $e^{z+w} = e^z e^w$

(2) $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, insbesondere ist: $|e^{iy}| = 1$

(3) $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

(4) $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
Insbesondere ist für alle $t \in \mathbb{R} : \cos(it) = \frac{e^{-t}+e^t}{2} \xrightarrow{t\to\infty} \infty, \sin(it) = \frac{e^{-t}-e^t}{2i} \xrightarrow{t\to\infty} -\infty$
Also sind Cosinus und Sinus auf $\mathbb{C}$ **nicht** beschränkt.

(5) $\forall k \in \mathbb{Z} : e^{z+2\pi ik} = e^z$

(6) $e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$

(7) $e^{i\pi} + 1 = 0$

Beweis

(1) Wie in Ana I.

(2) Nachrechnen!

(3) Folgt aus (1) und (2).

(4) Nachrechnen!

(5) Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &\overset{(1)}{=} e^z e^{2k\pi i} \\ &\overset{(2)}{=} e^z(\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} + i\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}) \\ &= e^z \end{aligned}$$

$\Rightarrow e^z$ ist auf $\mathbb{C}$ nicht injektiv!

(6) Die Äquivalenz folgt aus Implikation in beiden Richtungen:

„ $\Longleftarrow$ “ Folgt aus (5) mit $z = 0$.

„$\Longrightarrow$“ Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$1 = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)$$

Daraus folgt:

$$\sin(y) = 0 \implies \exists j \in \mathbb{Z} : y = j\pi$$

Und damit:

$$\begin{aligned} 1 &= e^x\cos(j\pi) = e^x(-1)^j \\ \implies& x = 0 \land \exists k \in \mathbb{N} : j = 2k \end{aligned}$$

Also ist $z = i2k\pi$.

(7) Es gilt:

$$e^{i\pi} \overset{(2)}{=} \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

■

Beispiel
Im Folgenden wollen wir alle $z \in \mathbb{C}$ bestimmen, für die $\sin(z) = 0$ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(z) = 0 &\overset{16.2(4)}{\iff} e^{iz} = e^{-iz} \\ &\overset{16.2(1)}{\iff} e^{2iz} = e^{-iz}e^{iz} = e^0 = 1 \\ &\overset{16.2(6)}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z} : 2iz = i2k\pi \\ &\iff z = k\pi \end{aligned}$$

Der Sinus hat also nur reelle Nullstellen.

Definition
Sei (a_n) ein Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ heißt eine **Potenzreihe** (PR). Sei nun:

$$\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

Dabei ist $\rho = \infty$, falls $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt ist. Dann heißt

$$r := \begin{cases} 0 & \text{, falls } \rho = \infty \\ \infty & \text{, falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} & \text{, falls } 0 < \rho < \infty \end{cases}$$

der **Konvergenzradius** (KR) der PR.

Satz 16.3 (Konvergenz von Potenzreihen)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und r seien wie oben.

(1) Ist $r = 0$, so konvergiert die PR **nur** für $z = z_0$.

(2) Ist $r = \infty$, so konvergiert die PR absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

(3) Sei $0 < r < \infty$. Es gilt:

(i) Ist $z \in \mathbb{C}$ und $|z - z_0| < r$, so konvergiert die PR absolut in z.

(ii) Ist $z \in \mathbb{C}$ und $|z - z_0| > r$, so divergiert die PR in z.

(iii) Ist $z \in \mathbb{C}$ und $|z - z_0| = r$, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beweis
Wie in Ana I. ■

Beispiele:

(1) Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den KR $r = 1$ und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ konvergiert } \iff |z| < 1$$

(2) Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat den KR $r = 1$. Für $|z| = 1$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ absolut. Insgesamt gilt also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \text{ konvergiert } \iff |z| \leq 1$$

(3) Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ hat KR $r = 1$, divergiert in $z = 1$ und konvergiert in $z = -1$.

(4) Die PRen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

haben jeweils KR $r = \infty$ (siehe 16.3).

17. Normierte Räume, Banachräume, Fixpunktsatz

In diesem Paragraphen sei $\mathbb{K}$ stets gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei X ein Vektorraum (VR) über $\mathbb{K}$.

Definition
Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ heißt genau dann eine **Norm** auf X, wenn folgendes erfüllt ist:

(1) $\forall x \in X : \|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(2) $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K} : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(3) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

In diesem Fall heißt $(X, \|\cdot\|)$ ein **normierter Raum** (NR).

Beispiele:

(1) Sei $n \in \mathbb{N}, X = \mathbb{K}^n$ und für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ die **euklidische Norm** gegeben:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$$

Dann ist $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ ein normierter Raum (vgl. §1).

(2) Sei $X = C[a, b]$ und für $f \in X$ seien die folgenden Normen gegeben:

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$$
$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}$$
$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

Leichte Übung: $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ und $(X, \|\cdot\|_\infty)$ sind NRe.

(3) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $X := C(K, \mathbb{R}^m)$ und sei für $f \in X$ die Norm

$$\|f\|_\infty := \max\{\|f(x)\| : x \in K\}$$

Leichte Übung: $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein NR.

Für den Rest dieses Paragraphen sei X stets ein NR mit Norm $\|\cdot\|$.

Bemerkung: Wie in §1 zeigt man die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\forall x, y \in X : |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Definition

(1) Sei (x_n) eine Folge in X. (x_n) heißt genau dann **konvergent**, wenn ein $x_0 \in X$ existiert für das gilt:

$$\|x_n - x_0\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

In diesem Fall ist x_0 eindeutig bestimmt und man schreibt $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x_0$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. x_0 heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (x_n).

(2) (x_n) heißt genau dann **divergent**, wenn (x_n) nicht konvergent ist.

(3) (x_n) heißt genau dann eine **Cauchyfolge** (CF), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

(4) Sei $x_0 \in X$ und $\delta > 0$. Definiere:

$$U_\delta(x) := \{\, x \in X \mid \|x - x_0\| < \delta \,\}$$

(5) Sei $A \subseteq X$. A heißt **offen**, genau dann wenn gilt:

$$\forall x \in A \exists \delta = \delta(x) > 0 : U_\delta(x) \subseteq A$$

A heißt **abgeschlossen**, genau dann wenn $X \setminus A$ offen ist.

Satz 17.1 (Eigenschaften von Folgen in normierten Räumen)
Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen in X, (α_n) Folge in $\mathbb{K}$, $x, y \in X$ und $A \subseteq X$.

(1) Gilt $x_n \to x, y_n \to y$ und $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{K}$, so folgt:

$$x_n + y_n \to x + y \qquad \alpha_n x_n \to \alpha x \qquad \|x_n\| \to \|x\|$$

D.h. die Addition und Skalarmultiplikation sind stetig.

(2) Ist (x_n) konvergent, so ist (x_n) **beschränkt**, d.h.:

$$\exists c \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leq c$$

und (x_n) ist eine CF.

(3) Genau dann wenn A abgeschlossen ist, gilt für jede konvergente Folge (x_n) in A:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in A$$

(4) Sei $(X, \|\cdot\|_\infty)$ wie in obigem Beispiel (3). Dann gilt für (f_n) in X und $f \in X$, dass (f_n) genau dann auf K **gleichmäßig** gegen f **konvergiert**, wenn gilt:

$$\begin{aligned} &\|f_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\to} 0 \\ :\iff &\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \forall x \in K \end{aligned}$$

Beweis

(1) Wie im $\mathbb{R}^n$.

(2) Wie im $\mathbb{R}^n$.

(3) Wie im $\mathbb{R}^n$.

(4) **In der großen Übung.** ■

Beispiel
Sei $X = C[-1,1]$ mit $\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x}$. Definiere die Folge (f_n) wie folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & , -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & , \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Dann ist klar, dass $f_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In den **großen Übungen** wird gezeigt:

(1) (f_n) ist eine CF in X.

(2) Es existiert **kein** $f \in X$ mit $\|f_n - f\|_2 \to 0$

Definition
X heißt ein **Banachraum** oder **vollständig**, genau dann wenn jede CF in X einen Grenzwert in X hat.

Beispiele:

(1) Sei $X = \mathbb{K}^n, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$. Dann folgt aus §2, dass $(X, \|\cdot\|_2)$ ein BR ist.

(2) Sei $X = C[-1,1], \|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x}$. Dann ist $(X, \|\cdot\|_2)$ **kein** BR.

(3) Sei $(X, \|\cdot\|_\infty)$ wie in 17.1(4). In den **großen Übungen** wird gezeigt, dass $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein BR ist.

Satz 17.2 (Banachscher Fixpunktsatz)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein BR, $\emptyset \neq A \subseteq X$ sei abgeschlossen und es sei $F : A \to X$ eine Abbildung mit:

(i) $F(A) \subseteq A$

(ii) F ist eine **Kontraktion**, d.h.:

$$\exists L \in [0,1) : \forall x, y \in A : \|F(x) - F(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|$$

Dann existiert genau ein $x^* \in A$ mit $F(x^*) = x^*$.
Ist $x_0 \in A$ beliebig und (x_n) definiert durch $x_{n+1} := F(x_n)$ $(n \geq 0)$, so ist $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$x_n \overset{n\to\infty}{\to} x^*$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$

Diese Folge heißt Folge der **sukzessiven Approximationen**.

Beweis
Sei $x_0 \in A$ und (x_n) wie oben definiert. Es gilt:

$$\|x_2 - x_1\| = \|F(x_1) - F(x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Induktiv lässt sich zeigen:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \|x_{k+1} - x_k\| \leq L^k \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Seien nun $m, n \in \mathbb{N}$ und $m > n$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)\| \\
&\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leq L^{m-1}\|x_1 - x_0\| + \cdots + L^n\|x_1 - x_0\| \\
&= (L^{m-1} + \cdots + L^n) \cdot \|x_1 - x_0\| \\
&= L^n(1 + \cdots + L^{m-n-1}) \cdot \|x_1 - x_0\| \\
&\leq L^n(\sum_{j=0}^{\infty} L^j) \cdot \|x_1 - x_0\| \\
&= \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|
\end{aligned}$$

Also ist (x_n) eine CF. Da X außerdem BR ist, existiert ein $x^* \in X$ mit $x_n \to x^*$. Wegen $(x_n) \subseteq A$ und A abgeschlossen ist außerdem $x^* \in A$.
Festes n und $m \to \infty$ liefert aus obiger Gleichung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|$$

Für $F(x^*)$ gilt also:

$$\begin{aligned}
\|F(x^*) - x^*\| &= \|F(x^*) - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*\| \\
&\leq \|F(x^*) - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x^*\| \\
&= \|F(x^*) - F(x_n)\| + \|x_{n+1} - x^*\| \\
&\leq L\|x^* - x_n\| + \|x_{n+1} - x^*\| \overset{n\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\|F(x^*) - x^*\| = 0 \iff F(x^*) = x^*$$

Sei nun $z \in A$ und $F(z) = z$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\|x^* - z\| = \|F(x^*) - F(z)\| \leq L\|x^* - z\| \\
\Longrightarrow\ &(1-L)\|x^* - z\| \leq 0 \\
\Longrightarrow\ &x^* = z
\end{aligned}$$

Also ist x^* eindeutig. ■

18. Differentialgleichungen: Grundbegriffe

In diesem Paragraphen seien $I, J, \dots$ immer Intervalle in $\mathbb{R}$.

Erinnerung: Seien $p, k \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $y = (y_1, \dots, y_p) : I \to \mathbb{R}^p$ heißt k-mal (stetig) db, genau dann wenn $y_1, \dots, y_p$ k-mal auf I (stetig) db sind.
In diesem Fall ist $y^{(j)} = (y_1^{(j)}, \dots, y_p^{(j)})$ $(j = 1, \dots, k)$.

Definition
Seien $n, p \in \mathbb{N}$, sei weiter $D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p}_{n+1 \text{ Faktoren}}$ und $F : D \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion.
Eine Gleichung der Form:

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{i}$$

heißt eine **(gewöhnliche) Differentialgleichung** (Dgl) n**-ter Ordnung**.
Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^p$ heißt eine **Lösung** (Lsg) von (i), genau dann wenn y auf I n-mal db, für alle $x \in I, (x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in D$ ist und gilt:

$$\forall x \in I : F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Beispiele:

(1) Sei $n = p = 1$, $F(x, y, z) = z + \frac{y}{x}$ und $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0 \right\}$, dann ist die zugehörige Dgl:

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

Z.B. ist $y : (0, \infty) \to \mathbb{R}, y(x) = \frac{1}{x}$ eine Lösung der Dgl.
Weitere Lösungen sind:

$$y : (0, 1) \to \mathbb{R}, y(x) := 0$$
$$y : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, y(x) := \frac{3}{x}$$

(2) Sei $n = 1, p = 2$ und folgende Dgl gegeben:

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, y(x) := (\cos x, \sin x)$ eine Lösung der Dgl.

Definition
Seien $n, p \in \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p}_{n \text{ Faktoren}}$ und $f : D \to \mathbb{R}^p$.
Eine Gleichung der Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \tag{ii}$$

heißt **explizite Differentialgleichung** n**-ter Ordnung**.
(hier gilt: $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$)

Definition
Seien p, n, D und f wie oben. Weiter sei $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in D$ fest.
Dann heißt:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{iii}$$

ein **Anfangswertproblem** (AwP).
Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^p$ heißt eine **Lösung** des AwP (iii), genau dann wenn y eine Lösung von (ii) ist und gilt:

$$y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Das AwP heißt **eindeutig lösbar**, genau dann wenn (iii) eine Lösung hat und für je zwei Lösungen $y : I \to \mathbb{R}^p, \tilde{y} : J \to \mathbb{R}^p$ von (iii) gilt:

$$\forall x \in I \cap J : y(x) = \tilde{y}(x)$$

(Beachte: $x_0 \in I \cap J$)

Beispiele:

(1) Sei $n = p = 1$ und das folgende AwP gegeben:

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Dann sind:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$
$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$$

Lösungen des AwP.

(2) Sei $n = p = 1$ und das folgende AwP gegeben:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dann ist:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$$

eine Lösung des AwP. In §19 werden wir sehen, dass dieses AwP eindeutig lösbar ist.

19. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

In diesem Paragraphen sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, s : I \to \mathbb{R}$ **stetig**. Weiter sei $J \subseteq I$ ein Teilintervall von I.

Definition

Die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + s(x) \tag{$*$}$$

heißt **lineare Differentialgleichung 1. Ordnung**. Sie heißt **homogen**, falls $s \equiv 0$, anderenfalls heißt sie **inhomogen**. s heißt **Störfunktion**.

Wir betrachten zunächst die zu $(*)$ gehörende **homogene Gleichung**:

$$y' = a(x)y \tag{H}$$

Aus Ana I 23.14 folgt, dass a auf I eine Stammfunktion A besitzt.

Satz 19.1 (Lösung einer homogenen linearen Dgl 1. Ordnung)
Sei $y : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion. y ist genau dann eine Lsg von (H), wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit:

$$y(x) = c \cdot e^{A(x)}$$

Beweis

„$\Longleftarrow$“ Es existiere ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $y(x) = ce^{A(x)}$ für $x \in J$. Dann gilt:

$$\forall x \in J : y'(x) = c \cdot e^{A(x)} \cdot A'(x) = a(x) \cdot c \cdot e^{A(x)} = a(x)y(x)$$

„$\Longrightarrow$“ Sei $g(x) := \frac{y(x)}{e^{A(x)}}$. Nachrechnen: $\forall x \in J : g'(x) = 0$
Aus Ana I folgt, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x \in J$ gilt $g(x) = c$. ■

Satz 19.2 (Eindeutige Lösung eines Anfangswertproblems)
Sei $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$. Dann hat das

$$\text{AwP} \begin{cases} y' = a(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I genau eine Lösung.

Beweis
Sei $c \in \mathbb{R}, y(x) = c \cdot e^{A(x)}$ für alle $x \in I$. Dann folgt aus 19.1, dass y eine Lösung von (H) ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} & y_0 = y(x_0) \\ \iff & y_0 = c \cdot e^{A(x_0)} \\ \iff & c = y_0 \cdot e^{-A(x_0)} \end{aligned}$$

■

Beispiel
Sei das folgende AwP gegeben:

$$\begin{cases} y' = \sin(x)y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' = \sin(x)y$ ist für $c \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{y(x) = c \cdot e^{-\cos(x)}}$$

Außerdem gilt:

$$1 = y(0) = c \cdot e^{-\cos(0)} = \frac{c}{e}$$

Also folgt $c = e$ und damit ist die Lösung des AwP $y(x) = e^{1-\cos(x)}$.

Nun betrachten wir die **inhomogene Gleichung**

$$y' = a(x)y + s(x) \tag{IH}$$

Für eine spezielle Lösung y_s von (IH) macht man den Ansatz $y_s(x) = c(x) \cdot e^{A(x)}$ mit einer (unbekannten) db Funktion c. Dies heißt **Variation der Konstanten**.
Mit diesem Ansatz gilt:

$$\begin{aligned} y_s'(x) &= c'(x) \cdot e^{A(x)} + c(x) \cdot e^{A(x)} \cdot a(x) \\ &\overset{!}{=} a(x)y_s(x) + s(x) \\ &= a(x)c(x) \cdot e^{A(x)} + s(x) \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent dazu, dass gilt:

$$\begin{aligned} & c'(x) \cdot e^{A(x)} = s(x) \\ \iff & c'(x) = s(x) \cdot e^{-A(x)} \\ \iff & \boxed{c(x) = \int s(x) \cdot e^{-A(x)} \, \mathrm{d}x} \end{aligned}$$

Ist also c eine Stammfunktion von $s \cdot e^{-A}$, so ist $y_s(x) := c(x) \cdot e^{A(x)}$ eine Lösung von (IH). Insbesondere besitzt (IH) auf I Lösungen.

Beispiel
Sei folgende inhomogene Gleichung gegeben:

$$y' = \sin(x)y + \sin(x) \tag{$*$}$$

Der Ansatz $y_s(x) = c(x) \cdot e^{-\cos(x)}$ für eine spezielle Lösung von $(*)$ liefert wie oben:

$$c(x) = \int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)} \, \mathrm{d}x = -e^{\cos(x)}$$

Dann ist $y_s(x) = -e^{\cos(x)} \cdot e^{-\cos(x)} = -1$.

Definition
Definiere die Lösungsmengen:

$$L_H := \{\, y : I \to \mathbb{R} \mid y \text{ ist eine Lösung von (H)} \,\}$$
$$L_{IH} := \{\, y : I \to \mathbb{R} \mid y \text{ ist eine Lösung von (IH)} \,\}$$

16.1 $\implies$ $L_H = \left\{\, c \cdot e^A \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \,\right\}$. Bekannt: $L_{IH} \neq \emptyset$.

Satz 19.3 (Lösungen)
Sei $y_s \in L_{IH}, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$.

(1) $y \in L_{IH} \iff \exists y_h \in L_H : y = y_h + y_s$

(2) Das

$$\text{AwP} \begin{cases} y' = a(x)y + s(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

hat auf I genau eine Lösung

Beweis
Leichte Übung! ■

Beispiele:

(1) $(I = \mathbb{R})$ Bestimme die allg. Lösung von

$$y' = 2xy + x \qquad (*)$$

1. Bestimme die allg. Lösung der Gleichung $y' = 2xy$: $y(x) = ce^{x^2} (c \in \mathbb{R})$.
2. Bestimme eine spezielle Lösung von $(*)$: $y_s(x) = ce^{x^2}$ mit $c(x) = \int xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$
Also: $y_s(x) = -\frac{1}{2}$
3. Die Allgemeine Lösung von $(*)$ lautet:

$$y(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2} \quad (c \in \mathbb{R})$$

(2) Löse das AwP:

$$\begin{cases} y' = 2xy + x \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Allg. Lösung der Dgl: $y(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$

$$-1 = y(1) = ce - \frac{1}{2} \implies c = -\frac{1}{2e}$$

Lösung des AwPs: $y(x) = -\frac{1}{2e}e^{x^2} - \frac{1}{2}$.

20. Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

In diesem §en seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f \in C(I), g \in C(J), x_0 \in I$ und $y_0 \in J$.

Definition
Die Differentialgleichung:

$$y' = f(x)g(y) \tag{i}$$

heißt **Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen**.
Wir betrachten auch noch das

$$\text{AwP} \begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{ii}$$

Satz 20.1 (Lösungen)
Sei $y_0 \in J^0$ (also ein innerer Punkt von J) **und** $g(y) \neq 0 \; \forall y \in J$.
Dann existiert ein Intervall I_{x_0} mit $x_0 \in I_{x_0} \subseteq I$ und:

(1) Das AwP (ii) hat eine Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$.

(2) Die Lösung aus (1) erhält man durch Auflösen der folgenden Gleichung nach $y(x)$.

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(t)} \, \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t} \tag{$*$}$$

(3) Sei $U \subseteq I$ ein Intervall und $u : U \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AwPs (ii), so ist $U \subseteq I_{x_0}$ und $u = y$ auf U (wobei y die Lösung aus (1) ist).
Insbesondere ist das AwP (ii) eindeutig lösbar.

Beweis
Definiere $G \in C^1(J)$ und $F \in C^1(I)$ durch:

$$G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)} \, \mathrm{d}t \qquad\qquad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t$$

Dann ist $G' = \frac{1}{g}, F' = f$ und $F(x_0) = 0 = G(y_0)$.
Da für alle $y \in J$ gilt:

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$$

ist entweder $G' > 0$ auf J oder $G' < 0$ auf J.
Also existiert die Umkehrabbildung $G^{-1} : G(J) \to J$, $K := G(J)$ ist ein Intervall und es gilt:

$$\begin{aligned} y_0 \in J^0 &\implies 0 = G(y_0) \in K^0 \\ &\implies \exists \varepsilon > 0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq K \end{aligned}$$

Da F stetig in x_0 ist, existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$|F(x)| = |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap I =: M_0$$

M_0 ist ein Intervall, $x_0 \in M_0 \subseteq I$ und $F(M_0) \subseteq K$. Sei

$$\mathfrak{M} := \{\, M \subseteq I \mid M \text{ ist Intervall}, x_0 \in M, F(M) \subseteq K \,\}$$

Da $M_0 \in \mathfrak{M}$ ist, ist $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Sei

$$I_{x_0} := \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$$

dann ist $I_{x_0} \in \mathfrak{M}$. Definiere nun $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ durch:

$$y(x) := G^{-1}(F(x))$$

so ist y auf I_{x_0} differenzierbar und es gilt:

$$y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0$$

Weiter gilt:

$$\forall x \in I : G(y(x)) = F(x) \tag{+}$$

also gilt $(*)$. Differenzierung von $(+)$ liefert:

$$\begin{aligned} &\forall x \in I_{x_0} : G'(y(x)y'(x) = F'(x) \\ \implies &\forall x \in I_{x_0} : \frac{1}{g(y(x))} y'(x) = f(x) \\ \implies &\forall x \in I_{x_0} : y'(x) = f(x)g(y(x)) \end{aligned}$$

(3) Es ist $u'(t) = f(t)g(u(t))$ für alle $t \in U$ **und** $u(U) \subseteq J$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{u'(t)}{g(u(t))} \\ \implies F(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \frac{u'(t)}{g(u(t))}\ \mathrm{d}t \\ &\overset{Subst.}{=} \begin{cases} s = u(t) \\ \mathrm{d}s = u'(t)\ \mathrm{d}t \\ t = x_0 \implies s = u(x_0) = y_0 \end{cases} = \int_{y_0}^{u(x)} \frac{1}{g(s)}\ \mathrm{d}s = G(u(x)) \end{aligned}$$

Also: $\forall x \in U : F(x) = G(u(x))$. Somit gilt:

$$F(U) = G(u(U)) \subseteq G(J) = K$$

D.h. $U \in \mathfrak{M}$ und daher ist: $U \subseteq I_{x_0}$.
Weiter gilt:

$$\forall x \in U : u(x) = G^{-1}(F(x)) = y(x) \qquad \blacksquare$$

Für die Praxis: Trennung der Veränderlichen (TDV):

$$\begin{aligned} & y' = f(x)g(y) \\ \to\ & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \\ \to\ & \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\ \mathrm{d}x \\ \to\ & \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\ \mathrm{d}x + c \end{aligned} \tag{iii}$$

Die allgemeine Lösung von (i) erhält man durch Auflösen der Gleichung (iii) nach y.
Zur Lösung von (ii) passt man die Konstante c der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ an.

Beispiele:

(1) Sei $y' = 2xe^{-y}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2xe^{-y} \\ &\to e^y\ \mathrm{d}y = 2x\ \mathrm{d}x \\ &\to \int e^y\ \mathrm{d}y = \int 2x\ \mathrm{d}x + c \\ &\to e^y = x^2 + c \\ &\to y = \log(x^2 + c) \end{aligned}$$

Ist z.B. $c = 0$, so ist $y(x) := \log(x^2)$ eine Lösung auf $(0, \infty)$, oder $y(x) = \log(x^2)$ ist eine auf $(-\infty, 0)$.
$c = 2 : y(x) = \log(x^2 + 2)$ ist eine Lösung auf $\mathbb{R}$.
$c = -1 : y(x) = \log(x^2 - 1)$ ist eine Lösung auf $(1, \infty)$.
Löse das

$$\text{AwP} \begin{cases} y' = 2xe^{-y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Allg. Lösung der Dgl:

$$\begin{aligned} & y(x) = \log(x^2 + c) \\ \Longrightarrow\ & 1 = y(1) = \log(1 + c) \\ \Longrightarrow\ & e = 1 + c \iff c = e - 1 \end{aligned}$$

$y(x) = \log(x^2 + e - 1)$ ist Lösung des AwPs auf $\mathbb{R}$.

(2) $y' = \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1+y}{y^2}$. Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1+y}{y^2} \\ \to\ & \frac{y^2}{y+1}\ \mathrm{d}y = \frac{x^2}{x-1}\ \mathrm{d}x \\ \to\ & \frac{y^2}{2} - y + \log(1 + y) = \frac{x^2}{2} + x + \log(x - 1) + c \end{aligned}$$

(Lösungen in impliziter Form)

21. Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

In diesem Paragraphen sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$. Für Punkte im $\mathbb{R}^{n+1}$ schreiben wir (x, y), wobei $x \in \mathbb{R}$ und $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definition
Ein **System von Differentialgleichungen 1. Ordnung** hat die Form:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \quad \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad \text{oder kurz: } y' = f(x, y) \tag{i}$$

Wir betrachten auch noch das

$$\text{AwP} \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (\text{wobei } (x_0, y_0) \in D) \tag{ii}$$

Satz 21.1 (Integralgleichung zur Lösbarkeit eines Anfangswertproblems)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $D := I \times \mathbb{R}^n, x_o \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ sei stetig. Für $y \in C(I, \mathbb{R}^n)$ gilt:

$$y \text{ ist eine Lösung des AwP (ii)} \iff \forall x \in I : y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \mathrm{d}t$$

In diesem Fall ist $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Beweis

„ $\Longrightarrow$ “ Es gilt: $y'(x) = f(x, y(x)) \forall x \in I$; da y und f stetig sind, folgt: $y' \in C(I, \mathbb{R})$. Weiter:

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} y'(t) \mathrm{d}t = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0 \quad \forall x \in I.$$

Bringt man y_0 auf die linke Seite, ergibt sich die Behauptung.

„ $\Longleftarrow$ “ Es gelte für alle $x \in I$:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \mathrm{d}t$$

Aus dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt: y ist auf I differenzierbar und

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \mathrm{d}t = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I.$$

Also erfüllt y die Differentialgleichung. Klar: $y(x_0) = y_0$. Also löst y das AwP. ■

Definition
Es sei weiterhin $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion.

(1) f genügt auf D einer **Lipschitz-Bedingung bezüglich y**

$$:\iff \exists L \geq 0 : \forall (x,y),(x,\bar{y}) \in D : \|f(x,y) - f(x,\bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\|$$

(2) f genügt auf D einer **lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y**

$$:\iff \forall a \in D \exists \text{Umgebung } U_a : f_{|D \cap U} \text{ genügt einer Lipschitz-Bedingung bzgl. } y$$

Satz 21.2 (Satz über die α-Norm)
Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}, x_o \in I$ und für $y \in C(I,\mathbb{R}^n)$ sei $\|y\|_\infty := \max\{\|y(x)\| : x \in I\}$ wie in §17 (also ist $(C(I,\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum).

Sei $\alpha > 0$ mit $\varphi_\alpha(x) := e^{-\alpha|x - x_0|}$ $(x \in I)$.

Für $y \in C(I,\mathbb{R}^n)$ sei $\|y\|_\alpha := \max\{\varphi_\alpha(x) \cdot \|y(x)\| : x \in I\}$.

Dann:

(1) $\|\cdot\|_\alpha$ ist eine Norm auf $C(I,\mathbb{R}^n)$.

(2) Seien $c_1 := \min\{\varphi_\alpha(x) : x \in I\},\ c_2 := \max\{\varphi_\alpha(x) : x \in I\}$. Es gilt:

$$c_1\|y\|_\infty \leq \|y\|_\alpha \leq c_2\|y\|_\infty \quad \forall y \in C(I,\mathbb{R}^n)$$

(3) Sei (g_k) eine Folge in $C(I,\mathbb{R}^n)$ und $g \in C(I,\mathbb{R}^n)$.

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned} \|g_k - g\|_\alpha \overset{k\to\infty}{\to} 0 &\iff \|g_k - g\|_\infty \overset{k\to\infty}{\to} 0 \\ &\iff (g_k) \text{ konvergiert auf } I \text{ gleichmäßig gegen } g \end{aligned}$$

(ii) (g_k) ist eine Cauchy-Folge in $(C(I,\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\alpha)$, genau dann wenn (g_k) eine Cauchy-Folge in $(C(I,\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ist.

(iii) $(C(I,\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\alpha)$ ist ein Banachraum.

Beweis
(1), (2) Nachrechnen.

(3) (i) und (ii) folgen aus (2); (iii) folgt aus (i) und (ii). ■

Bezeichnung: EuE = Existenz und Eindeutigkeit.

Satz 21.3 (EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version I))
Sei $I = [a,b], x_o \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n, D := I \times \mathbb{R}^n, f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ und f genüge auf D einer Lipschitz-Bedingung bezüglich y.

Dann ist das

$$\text{AwP} \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{ii}$$

auf I eindeutig lösbar.

Ist $g_0 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ und (g_k) definiert durch

$$g_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g_k(t)) \mathrm{d}t \quad (x \in I, k \geq 0),$$

dann konvergiert (g_k) auf I gleichmäßig gegen die Lösung des AwPs (ii).
(g_n) heißt Folge der sukzessiven Approximationen.

Beweis
Da f auf D einer Lipschitz-Bedingung genügt, gilt:

$$\exists L > 0 : \|f(x,y) - f(x,\bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\| \quad \forall (x,y), (x,\bar{y}) \in D.$$

Es sei $\alpha := 2L$; φ_α und $\|\cdot\|_\alpha$ seien wie in 21.2, $X := C(I, \mathbb{R}^n)$. Definiere $F : X \to X$ durch

$$(F(y))(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \mathrm{d}t$$

Für $y \in X$ gilt dann:

$$\begin{aligned} y \text{ ist Lösung des AwP} &\iff F(y) = y \\ F(y) = y &\iff y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \mathrm{d}t \quad \forall x \in I \\ &\overset{21.1}{\iff} y \text{ löst das AwP (ii)} \end{aligned}$$

Wir zeigen: $\|F(y) - F(z)\|_\alpha \leq \frac{1}{2}\|y - z\|_\alpha \quad \forall y, z \in X$. **Alle** Behauptungen folgen dann aus 17.2.

Seien $y, z \in X, x \in I$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|(F(y))(x) - (F(z))(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^{x} (f(t, y(t)) - f(t, z(t))) \ \mathrm{d}t \right\| \\ &\overset{12.4}{\leq} \left| \int_{x_0}^{x} \|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\| \ \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} L\|y(t) - z(t)\| \ \mathrm{d}t \right| \\ &= L \left| \int_{x_0}^{x} \|y(t) - z(t)\| \ \mathrm{d}t \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L\left|\int_{x_0}^{x} \|y(t)-z(t)\|\varphi_\alpha(t)\cdot\frac{1}{\varphi_\alpha(t)}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le L\left|\int_{x_0}^{x} \|y-z\|_\alpha\cdot\frac{1}{\varphi_\alpha(t)}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le L\|y-z\|_\alpha\left|\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\varphi_\alpha(t)}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{L}{\alpha}\|y-z\|_\alpha\left(\frac{1}{\varphi_\alpha(x)}-1\right) \\
&\le \frac{1}{2}\|y-z\|_\alpha\frac{1}{\varphi_\alpha(x)}
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\|(F(y))(x)-(F(z))(x)\| &\le \frac{1}{2}\|y-z\|_\alpha\frac{1}{\varphi_\alpha(x)} \quad \forall x\in I \\
\implies \varphi_\alpha(x)\|(F(y))(x)-(F(z))(x)\| &\le \frac{1}{2}\|y-z\|_\alpha \quad \forall x\in I
\end{aligned}$$

Fazit: $\|F(y)-F(z)\|_\alpha \le \frac{1}{2}\|y-z\|_\alpha$. ■

Frage: Warum haben wir in obigem Beweis nicht die $\|\cdot\|_\infty$-Norm benutzt?

$$\begin{aligned}
\|(F(y))(x)-(F(z))(x)\| &\overset{\text{wie oben}}{\le} L\left|\int_{x_0}^{x}\|y(t)-z(t)\|dt\right| \\
&\le L\left|\int_{x_0}^{x}\|y-z\|_\infty dt\right| \\
&\le L\|y-z\|_\infty\left|\int_{x_0}^{x}1\mathrm{d}t\right| \\
&= L\|y-z\|_\infty|x-x_0| \\
&\le L(b-a)\|y-z\|_\infty \quad \forall x\in I
\end{aligned}$$

Dann: $\|F(y)-F(z)\|_\infty \le L(b-a)\|y-z\|_\infty$ I.A. wird $L(b-a)$ **nicht** kleiner 1 sein!

Beispiel (zu 21.3)

Zeige, dass das

$$\text{AwP}\begin{cases} y' = 2x(1+y) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ genau eine Lösung hat.

Sei $a>0$ und $I:=[-a,a]; f(x,y)=2x(1+y)$. Dann gilt $\forall x\in I, \forall y,\bar{y}\in\mathbb{R}:$

$$\begin{aligned}
|f(x,y)-f(x,\bar{y})| &= |2xy-2x\bar{y}| \\
&= 2|x||y-\bar{y}| \\
&\le 2a|y-\bar{y}|.
\end{aligned}$$

Aus 21.3 folgt dann: das Anfangswertproblem hat auf I genau eine Lösung $y:[-a,a]\to\mathbb{R}$. Setze nun $g_0(x):=0$ und (g_k) sei definiert wie in 21.3. Induktiv sieht man (Übung!):

$$g_k(x) = x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\dots+\frac{x^{2k}}{k!}$$

Aus 21.3 folgt: (g_k) konvergiert auf I gleichmäßig gegen y.
Aus Analysis I folgt: (g_k) konvergiert auf I gleichmäßig gegen $e^{x^2} - 1$.
Also: Lösung des AwPs auf $[-a, a]$: $y(x) = e^{x^2} - 1$.
Es war $a > 0$ beliebig, also ist $y(x) = e^{x^2} - 1$ **die** Lösung des AwPs **auf** $\mathbb{R}$.

Ohne Beweis:

Satz 21.4 (EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version II))
Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n, s > 0$, es sei

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x \in I, \|y - y_0\| \leq s \right\}$$

und $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$. Weiter sei

$$M := \max\{\|f(x, y)\| : (x, y) \in D\} > 0$$

und f genüge auf D einer Lipschitz-Bedingung bezüglich y. Außerdem sei

$$J := I \cap \left[x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}\right]$$

Dann hat das

$$\text{AwP} \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf J genau eine Lösung.

Ohne Beweis:

Satz 21.5 (EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version III))
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ **offen**, $(x_0, y_0) \in D, f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ und f genüge auf D einer **lokalen** Lipschitz-Bedingung bezüglich y.

Dann hat das

$$\text{AwP} \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung.

(Nochmals, das heißt: Das AwP (ii) hat eine Lösung $y : J \to \mathbb{R}^n \quad (J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall) und für je zwei Lösungen $\hat{y} : \hat{J} \to \mathbb{R}, \tilde{y} : \tilde{J} \to \mathbb{R}$ von (ii) gilt: $\hat{y} = \tilde{y}$ auf $\hat{J} \cap \tilde{J} \quad (\hat{J}, \tilde{J}$ Intervalle in $\mathbb{R}$))

Definition
Sei $y : J \to \mathbb{R}^n$ ($J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall) eine Lösung des AwPs (ii).

y heißt **nicht fortsetzbar**, genau dann wenn aus $\hat{y} : \hat{J} \to \mathbb{R}^n (\hat{J}$ ein Intervall in $\mathbb{R})$ ist Lösung von (ii) stets folgt, dass $\hat{J} \subseteq J$ und auf $\hat{J}$ $\hat{y} = y$ ist.

Satz 21.6 (Eindeutigkeit einer nicht fortsetzbaren Lösung)
Es seien $D, (x_0, y_0)$ und f wie in 21.5. Dann besitzt das AwP (ii) eine eindeutig bestimmte, nicht fortsetzbare Lösung.

Beweis
Es sei

$$\mathfrak{M} := \{(y, I_y) : I_y \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall}, x_0 \in I_y, y : I_y \to \mathbb{R}^n \text{ ist Lösung von (ii)}\}$$

Aus 21.5 folgt, dass $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ist und für $(y_1, I_{y_1}), (y_2, I_{y_2}) \in \mathfrak{M}$ gilt: $y_1 = y_2$ auf $I_{y_1} \cap I_{y_2}$.

$$I := \bigcup_{(y, I_y) \in \mathfrak{M}} I_y$$

ist ein Intervall. Definiere $y : I \to \mathbb{R}^n$ wie folgt: zu $x \in I$ existiert ein $(y_1, I_{y_1}) \in \mathfrak{M}$, sodass für $x \in I_{y_1}$ gilt: $y(x) := y_1(x)$.

Übung: $y : I \to \mathbb{R}^n$ leistet das Gewünschte. ∎

22. Lineare Systeme

In diesem Paragraphen sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n, D := I \times \mathbb{R}^n, b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ebenfalls stetig (d.h. für $A(x) = (a_{jk}(x))$ sind alle $a_{jk} : I \to \mathbb{R}$ stetig).
Hier ist für alle $x \in I$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x, y) := A(x)y + b(x)$$

Definition
Das System von Differentialgleichungen:

$$y' = A(x)y + b(x) \tag{S}$$

heißt ein **lineares System**. (Fall $n = 1$ siehe §19.)
Ist $b \equiv 0$, so heißt (S) **homogen**, anderenfalls **inhomogen**.
Neben (S) betrachten wir auch noch das zu (S) gehörige **homogene System**

$$y' = A(x)y \tag{H}$$

und das

$$\text{AwP} \begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{A}$$

Satz 22.1 (Lösungen)

(1) (A) hat auf I genau eine Lösung.

(2) Das System (S) hat Lösungen auf I.

(3) Ist $J \subseteq I$ ein Intervall und $\hat{y} : J \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (S), so gibt es eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$ von (S) mit $\hat{y} = y$ auf J.

(4) Sei $y_s : I \to \mathbb{R}^n$ eine spezielle Lösung von (S), dann ist $y : I \to \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösung von (S) auf I, wenn eine Lösung $y_h : I \to \mathbb{R}^n$ von (H) existiert mit:

$$y = y_h + y_s$$

Bemerkung 22.2
Wegen 22.1(3) gehen wir immer davon aus, dass Lösungen von (S) auf ganz I definiert sind.

Beweis

(1) **Fall 1:** $I = [a, b]$
Es ist $f(x, y) = A(x)y + b(x)$. Sei $L := \max\{\|A(x)\| : x \in I\}$. Für alle $(x, y), (x, \overline{y}) \in D$

gilt:

$$\begin{aligned}\|f(x,y)-f(x,\overline{y})\| &= \|A(x)(y-\overline{y})\| \\ &\overset{\S 1}{\leq} \|A(x)\|\cdot\|y-\overline{y}\| \\ &\leq L\|y-\overline{y}\|\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus 21.3.

Fall 2: I beliebig.
Sei $\mathfrak{M} := \{\, K \subseteq I \mid K$ ist kompaktes Intervall, $x_0 \in K \,\}$. Dann ist $I = \bigcup_{K\in\mathfrak{M}} K$.
Ist $x \in I$, so existiert ein $K \in \mathfrak{M}$ mit $x \in K$. Nach Fall 1. hat das AwP auf K genau eine Lösung $y_K : K \to \mathbb{R}^n$. Definiere nun $y : I \to \mathbb{R}^n$ wie folgt:

$$y(x) := y_K(x) \tag{$*$}$$

Sei $\tilde{K} \in \mathfrak{M}$ mit $x \in \tilde{K}$ und sei $y_{\tilde{K}}$ die eindeutig bestimmte Lösung von (A) auf $\tilde{K}$. Dann ist $y_K = y_{\tilde{K}}$ auf $K \cap \tilde{K}$, also:

$$y_K(x) = y_{\tilde{K}}(x)$$

D.h. y ist durch $(*)$ wohldefiniert.
Leichte Übung: y ist auf I db und löst das AwP auf I.
Sei $\tilde{y} : I \to \mathbb{R}^n$ eine weitere Lösung von (A) auf I und sei $x \in I$. Dann existiert ein $K \in \mathfrak{M}$ mit $x \in K$ und nach Definition gilt $y(x) = y_K(x)$. Da $\tilde{y}_K$ eine Lösung des AwPs (A) auf K ist, gilt nach Fall 1.: $\tilde{y}\mid_K = y_K$ Dann gilt also:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}\mid_K(x) = y_K(x) = y(x)$$

(2) Folgt aus (1).

(3) Sei $\xi \in J, \eta := \hat{y}(\xi)$. Dann ist $\hat{y}$ eine Lösung auf J des AwPs

$$\begin{cases} y' = A(x) + b(x) \\ y(\xi) = \eta \end{cases} \tag{$+$}$$

Aus (1) folgt, dass das AwP auf I eine eindeutig bestimmte Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$ hat. Sei $x \in J$.
Fall $x = \xi$:
In diesem Fall gilt:

$$\hat{y}(x) = \hat{y}(\xi) = \eta = y(\xi) = y(x)$$

Fall $x > \xi$:
Sei $K := [\xi, x]$. Da $\hat{y}$ und y Lösungen des AwPs $(+)$ auf $[\xi, x]$ sind folgt aus (1), dass $y = \hat{y}$ auf K, also:

$$\hat{y}(x) = y(x)$$

Fall $x < \xi$:
Sei $K := [x, \xi]$. Da $\hat{y}$ und y Lösungen des AwPs $(+)$ auf $[x, \xi]$ sind folgt aus (1), dass $y = \hat{y}$ auf K, also:

$$\hat{y}(x) = y(x)$$

(4) Leichte Übung! ■

Definition
Setze $\mathbb{L} := \{y : I \to \mathbb{R}^n : y \text{ ist eine Lösung von (H) auf } I\ \}$
($y \equiv 0$ liegt in $\mathbb{L}$)

Satz 22.3 (Lösungsmenge als Vektorraum)

(1) Sind $y^{(1)}, y^{(2)} \in \mathbb{L}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so sind $y^{(1)} + y^{(2)} \in \mathbb{L}$ und $\alpha y^{(1)} \in \mathbb{L}$. $\mathbb{L}$ ist also ein reeller Vektorraum.

(2) Seien $y^{(1)}, ..., y^{(k)} \in \mathbb{L}$. Dann sind äquivalent:

   (i) $y^{(1)}, ..., y^{(k)}$ sind in $\mathbb{L}$ linear unabhängig.

   (ii) $\forall x \in I$ sind $y^{(1)}(x), ..., y^{(k)}(x)$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$.

   (iii) $\exists \xi \in I : y^{(1)}(\xi), ..., y^{(k)}(\xi)$ sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$.

(3) $\dim \mathbb{L} = n$.

Beweis

(1) Nachrechnen

(2) Der Beweis erfolgt durch Ringschluss:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Sei $x_1 \in I$. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ und

$$0 = \alpha_1 y^{(1)}(x_1) + \cdots + \alpha_k y^{(k)}(x_1)$$
$$\tilde{y} := \alpha_1 y^{(1)} + \cdots + \alpha_k y^{(k)}$$

Aus (1) folgt: $\tilde{y} \in \mathbb{L}$. Weiter ist $\tilde{y}$ eine Lösung des AwPs

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_1) = 0 \end{cases}$$

Da $y \equiv 0$ dieses AwP ebenfalls löst und aus 22.1 folgt, dass das AwP eindeutig lösbar ist, muss gelten:

$$0 = \tilde{y} = \alpha_1 y^{(1)} + \cdots + \alpha_k y^{(k)}$$

Aus der Voraussetzung folgt dann:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

Also sind $y^{(1)}(x_1), ..., y^{(k)}(x_1)$ sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Klar ✓

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Seien $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ und $0 = \alpha_1 y^{(1)} + \cdots + \alpha_k y^{(k)}$, dann folgt:

$$0 = \alpha_1 y^{(1)}(\xi) + \cdots + \alpha_k y^{(k)}(\xi)$$

Aus der Voraussetzung folgt dann: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ Also sind $y^{(1)}, ..., y^{(k)}$ linear unabhängig in $\mathbb{L}$.

(3) Aus (2) folgt, dass $\dim \mathbb{L} \leq n$ ist.

Für $j = 1, ..., n$ sei $y^{(j)}$ die eindeutig bestimmte Lösung des AwPs

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = e_j \end{cases} \quad (e_j = \text{ j-ter Einheitsvektor im } \mathbb{R}^n).$$

Dann sind $y^{(1)}(x_0), ..., y^{(n)}(x_0)$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$. Aus (2) folgt, dass $y^{(1)}, ..., y^{(k)}$ linear unabhängig in $\mathbb{L}$ sind, also ist $\dim \mathbb{L} \geq n$. ■

Definition

Sei $B : I \to \mathbb{R}^{n\times n}, B(x) = (b_{jk}(x))$ für alle $x \in I$.

B heißt **differenzierbar** auf I, genau dann wenn $b_{jk} : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar sind ($j, k = 1, \dots, n$).

In diesem Fall ist

$$B'(x) := (b'_{jk}(x)) \quad (x \in I)$$

Definition

(1) Seien $y^{(1)}, ..., y^{(n)} \in \mathbb{L}$. $y^{(1)}, ..., y^{(n)}$ heißt ein **Lösungssystem** (LS) von (H).

$$Y(x) := (y^{(1)}(x), ..., y^{(n)}(x))$$

(j-te Spalte von $Y = y^{(j)}$) heißt **Lösungsmatrix** (LM) von (H).

$$W(x) := \det Y(x)$$

heißt **Wronskideterminante**.

(2) Sei $y^{(1)}, ..., y^{(n)}$ ein Lösungssystem von (H). Sind $y^{(1)}, ..., y^{(n)}$ linear unabhängig in $\mathbb{L}$, so heißt $y^{(1)}, ..., y^{(n)}$ ein **Fundamentalsystem** (FS) und $Y = (y^{(1)}, ..., y^{(n)})$ eine **Fundamentalmatrix** (FM).

(3) Ist $y^{(1)}, ..., y^{(n)}$ ein FS von (H), so lautet die allgemeine Lösung von (H):

$$y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + \cdots + c_n y^{(n)}(x) \quad (c_1, ..., c_n \in \mathbb{R})$$

Satz 22.4 (Zusammenhang FS, FM und Wronskideterminante)

$y^{(1)}, ..., y^{(n)}$ sei ein LS von (H). Y und W seien definiert wie oben. Dann:

(1) $Y'(x) = A(x)Y(x) \quad \forall x \in I.$

(2) $y^{(1)}, ..., y^{(n)}$ ist ein Fundamentalsystem von (H)
$\iff Y(x)$ invertierbar $\forall x \in I$
$\iff \exists \xi \in I : Y(\xi)$ ist invertierbar
$\iff \forall x \in I : W(x) \neq 0$
$\iff \exists \xi \in I : W(\xi) \neq 0.$

Beweis

(1) Nachrechnen

(2) folgt aus 22.3. ■

Spezialfall: $n = 2$. $A(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & -a_2(x) \\ a_2(x) & a_1(x) \end{pmatrix}$; $a_1, a_2 : I \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $y^{(1)} = (y_1, y_2)$ eine Lösung von

$$y' = A(x)y \tag{$*$}$$

auf I und $y^{(1)} \not\equiv 0$. Das heißt:

$$\begin{cases} y_1' = a_1(x)y_1 - a_2(x)y_2 \\ y_2' = a_2(x)y_1 + a_1(x)y_2 \end{cases} .$$

Setze $y^{(2)} := (-y_2, y_1)$. Dann ist:

$$A(x)y^{(2)} = \begin{pmatrix} -a_1(x)y_2 - a_2(x)y_1 \\ -a_2(x)y_2 + a_1(x)y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2' \\ y_1' \end{pmatrix} = \left(y^{(2)}\right)'$$

Das heißt: $y^{(2)}$ löst ebenfalls $(*)$ auf I, oder: $y^{(1)}, y^{(2)}$ ist ein Lösungssystem von $(*)$.

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & -y_2(x) \\ y_2(x) & y_1(x) \end{pmatrix}, W(x) = \det Y(x) = y_1(x)^2 + y_2(x)^2 \neq 0$$

Mit 22.4 folgt: $y^{(1)}, y^{(2)}$ ist ein Fundamentalsystem von $(*)$.

Beispiel
$(n = 2)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$y' = Ay \tag{$*$}$$

und $y = (y_1, y_2)$. Also: $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

$y^{(1)}(x) := \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$ ist eine Lösung von $(*)$ auf $\mathbb{R}$. $y^{(2)}(x) := \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$ ist eine weitere Lösung von $(*)$ auf $\mathbb{R}$. $y^{(1)}, y^{(2)}$ ist ein Fundamentalsystem von $(*)$. Allgemeine Lösung von $(*)$: $y(x) = \begin{pmatrix} c_1 \cos(x) - c_2 \sin(x) \\ c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Ohne Beweis:

Satz 22.5 (Spezielle Lösung)
Sei $y^{(1)}, ..., y^{(n)}$ ein Fundamentalsystem von (H), $Y(x)$ sei definiert wie oben. Setze

$$\boxed{y_s(x) := Y(x) \int Y(x)^{-1} b(x) \mathrm{d}x \quad (x \in I).}$$

Dann ist y_s eine spezielle Lösung von (S) auf I.

$$W_k(x) := \det\left(y^{(1)}(x), ..., y^{(k-1)}(x), b(x), y^{(k+1)}(x), ..., y^{(n)}(x)\right) \quad (k = 1, ..., n)$$

Dann gilt: $y_s(x) = \sum_{k=1}^n \left(\int \frac{W_k(x)}{W(x)} \mathrm{d}x\right) y^{(k)}(x)$.

Beispiel
Bestimme die allgemeine Lösung von

$$y' = Ay + \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}, \tag{+}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bekannt: Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $y' = Ay$:

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} -\sin(x) & -\sin(x) \\ \cos(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 0.$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1.$$

$$y_s(x) := \left(\int 1 \mathrm{d}x\right) y^{(2)}(x) = xy^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -x\sin(x) \\ x\cos(x) \end{pmatrix} \text{ ist eine spezielle Lösung von } (+).$$

Allgemeine Lösung von (+):

$$\begin{aligned} y(x) &= \underbrace{c_1 \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}}_{\text{allg. Lsg. der hom. Glg.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x\sin(x) \\ x\cos(x) \end{pmatrix}}_{\text{spez. Lsg.}} \\ &= \begin{pmatrix} c_1\cos(x) - c_2\sin(x) - x\sin(x) \\ c_1\sin(x) + c_2\cos(x) + x\cos(x) \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Löse das AwP $\begin{cases} y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} c_1\cos(0) - c_2\sin(0) - 0\cdot\sin(0) \\ c_1\sin(0) + c_2\cos(0) + 0\cdot\cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Also: $c_1 = c_2 = 0$, d.h.: **die** Lösung des AwP ist: $y(x) = \begin{pmatrix} -x\sin(x) \\ x\cos(x) \end{pmatrix}$.

23. Homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

In diesem Paragraphen sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine konstante Matrix.
Wir betrachten das homogene System

$$y' = Ay \tag{H}$$

Ohne Beweise geben wir ein „Kochrezept“ an, wie man zu einem Fundamentalsystem von (H) kommt.

Vorbereitungen:

(1) Es sei stets $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ das **charakteristische Polynom** von A (I = Einheitsmatrix).
Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert (EW) von A, dann ist $p(\lambda_0) = 0$. Die Koeffizienten von p sind reell, also ist $p(\overline{\lambda_0}) = 0$ und damit $\overline{\lambda_0}$ ein Eigenwert von A.

(2) Für $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\operatorname{Kern}(A - \lambda_0 I) \subseteq \operatorname{Kern}((A - \lambda_0 I)^2) \subseteq \operatorname{Kern}((A - \lambda_0 I)^3) \subseteq \dots$$

Kochrezept:

(1) Bestimme die **verschiedenen** Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r (r \leq n)$ von A und deren algebraische Vielfachheiten $k_1, \dots, k_r$, also:

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

Ordne diese Eigenwerte wie folgt an: $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Aus der Liste $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r$ entferne jedes λ_j mit $\operatorname{Im}(\lambda_j) < 0$. Es bleibt:

$$M := \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \cup \{\lambda_j : m+1 \leq j \leq r, \operatorname{Im}(\lambda_j) > 0\}$$

(2) Zu $\lambda_j \in M$ bestimme eine Basis von $V_j := \operatorname{Kern}((A - \lambda_j I)^{k_j})$ wie folgt: Bestimme eine Basis von $\operatorname{Kern}(A - \lambda_j I)$, ergänze diese Basis zu einer Basis von $\operatorname{Kern}((A - \lambda_j I)^2)$, usw.

(3) Sei $\lambda_j \in M$ und v ein Basisvektor von V_j.

$$y(x) := e^{\lambda_j x}(v + \frac{x}{1!}(A - \lambda_j I)v + \frac{x^2}{2!}(A - \lambda_j I)^2 v + \dots + \frac{x^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{k_j - 1} v)$$

Oder kürzer:

$$\boxed{y(x) := e^{\lambda_j x} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k_j - 1} \frac{x^i}{i!}(A - \lambda_j I)^i \cdot v \right)}$$

Fall 1: $\lambda_j \in \mathbb{R}$.
Dann ist $y(x) \in \mathbb{R}^n \; \forall x \in \mathbb{R}$ und y ist eine Lösung von (H).
Fall 2: $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Zerlege y komponentenweise in Real- und Imaginärteil:

$$y(x) := y^{(1)}(x) + iy^{(2)}(x)$$

mit $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x) \in \mathbb{R}^n$. Dann sind $y^{(1)}, y^{(2)}$ linear unabhängige Lösungen von (H).

(4) Führt man (3) für **jedes** $\lambda_j \in M$ und **jeden** Basisvektor von V_j durch, so erhält man ein Fundamentalsystem von (H).

Definition
[...] bezeichne die **lineare Hülle**.

Beispiele:

(1) Bestimme ein Fundamentalsystem der Gleichung:

$$y' = Ay \tag{$*$}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - (1+2i))(\lambda - (1-2i))$$

$$\lambda_1 = 1 + 2i \qquad \lambda_2 = 1 - 2i$$
$$k_1 = 1 \qquad k_2 = 1$$

Also ist $M := \{\lambda_1\}$. Aus $\text{Kern}(A - \lambda_1 I) = \left[\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ folgt:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^x(\cos(2x) + i\sin(2x)) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^x \begin{pmatrix} -2\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + ie^x \begin{pmatrix} 2\cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sei also:

$$y^{(1)}(x) := e^x \begin{pmatrix} -2\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} \qquad y^{(2)}(x) := e^x \begin{pmatrix} 2\cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}$$

Dann ist $y^{(1)}, y^{(2)}$ ein Fundamentalsystem von $(*)$.

(2) Bestimme ein Fundamentalsystem der Gleichung:

$$y' = Ay \tag{$*$}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 & \qquad \lambda_2 &= 1 \\ k_1 &= 1 & \qquad k_2 &= 2 \end{aligned}$$

Also ist $M := \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$: Aus $\operatorname{Kern}(A - 2I) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ folgt:

$$y^{(1)}(x) := e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\lambda_2 = 1}$: Aus $\operatorname{Kern}(A - I) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \subseteq \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \operatorname{Kern}((A - I)^2)$ folgt:

$$y^{(2)}(x) := e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y^{(3)}(x) := e^{x} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x(A - I) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{x} \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ ist ein Fundamentalsystem von $(*)$.

(3) Sei A wie in Beispiel (2). Löse das

$$\text{AwP} \begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung von $y' = Ay$ lautet:

$$y(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{x} \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow c_1 = -1 \qquad c_2 = 1 \qquad c_3 = 2$$

Lösung des AWPs:

$$y(x) = -e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^{x} \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) Bestimme die allgemeine Lösung von

$$y' = Ay + \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

Mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme dazu zunächst die allgemeine Lösung von $y' = Ay$. Es gilt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(1 + \lambda)$$

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & \lambda_2 = -1 \\ k_1 = 1 & k_2 = 1 \end{array}$$

Da $\mathrm{Kern}(A - I) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ und $\mathrm{Kern}(A + I) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ ist, ist

$$y^{(1)}(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y^{(2)}(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
Sei nun $Y(x) := \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$
Dann ist

$$\begin{aligned} y_s(x) &= Y(x) \int Y(x)^{-1} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} \, \mathrm{d}x \\ &= Y(x) \int \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} \, \mathrm{d}x \\ &= Y(x) \int \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2x} \end{pmatrix} \, \mathrm{d}x \\ &= \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^x \\ \frac{1}{2}e^x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine spezielle Lösung von $(*)$.

Die allgemeine Lösung von $(*)$ lautet also:

$$y(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe^x \\ \frac{1}{2}e^x \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

24. Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

In diesem Paragraphen sei $n \in \mathbb{N}, I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Für $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ setze $Ly := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y$. Die Differenzialgleichung

$$Ly = b \tag{D}$$

heißt eine **lineare Dgl *n*-ter Ordnung**. Sie heißt **homogen**, falls $b \equiv 0$, anderenfalls **inhomogen**.
Setze $b_0(x) := (0, \ldots, 0, b(x))^T (\in \mathbb{R}^n)$ und

$$A(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir das System:

$$z' = A(x)z + b_0(x) \tag{S}$$

Satz 24.1 (Lösungen)

(1) Ist $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (D) auf I, so ist $z := (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ eine Lösung von (S) auf I.

(2) Ist $z := (z_1, \ldots, z_n)$ eine Lösung von (S) auf I, so ist $y := z_1$ eine Lösung von (D) auf I.

Beweis
Nachrechnen! ■

Wir betrachten auch noch die zu (D) gehörende **homogene** Gleichung

$$Ly = 0 \tag{H}$$

Sind $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$, so heißt

$$\begin{cases} Ly = b \\ y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{A}$$

ein **Anfangswertproblem** (AwP).

Die folgenden Sätze 24.2 und 24.3 folgen aus 24.1 und den Sätzen aus §21.

Satz 24.2 (Lösungsmenge als Vektorraum)

(1) Das AwP (A) hat auf I genau eine Lösung.

(2) (D) hat Lösungen auf I.

(3) Sei y_s eine spezielle Lösung von (D) auf I. Für $y : I \to \mathbb{R}$ gilt:
y ist eine Lsg von (D) auf I, genau dann wenn eine Lösung y_h von (H) existiert:

$$y = y_h + y_s$$

(4) Ist $J \subseteq I$ ein Intervall, $\hat{y} : J \to \mathbb{R}$ eine Lsg von (D) auf J, so existiert eine Lsg $y : I \to \mathbb{R}$ mit $\hat{y} = y|_J$.

(5) Sei $\mathbb{L}$ die Menge aller Lösungen von (H) auf I. Dann ist $\mathbb{L}$ ein reeller Vektorraum und $\dim \mathbb{L} = n$.
Für $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{L}$ sind äquivalent:

  (i) $y_1, \ldots, y_k$ sind linear unabhängig in $\mathbb{L}$.

  (ii) Für alle $x \in I$ sind die Vektoren $(y_j(x), y_j'(x), \ldots, y_j^{(n-1)}(x))(j = 1, \ldots, k)$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$.

  (iii) Es existiert ein $\xi \in I$ sodass die Vektoren $(y_j(\xi), \ldots, y_j^{(n-1)}(\xi))(j = 1, \ldots, k)$ linear unabhängig sind im $\mathbb{R}^n$.

Definition
Seien $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{L}$.

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

heißt **Wronskideterminante**. Sind $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängig in $\mathbb{L}$, so heißt $y_1, \ldots, y_n$ ein **Fundamentalsystem** (FS) von (H). I.d. Fall lautet die allgemeine Lösung von (H):

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \quad (c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R})$$

Aus 24.2 folgt für $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{L}$:
$y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{L}$ ist genau dann ein FS von (H), wenn gilt:

$$\forall x \in I : W(x) \neq 0 \iff \exists \xi \in I : W(\xi) \neq 0$$

Satz 24.3 (Spezielle Lösung)
Sei $y_1, \ldots, y_n$ ein FS von (H) und W wie oben. Für $k = 1, \ldots, n$ sei $W_k(x)$ die Determinante die entsteht, wenn man die k-te Spalte von $W(x)$ ersetzt durch $(0, \ldots, 0, b(x))^T$. Setze

$$y_s(x) := \sum_{k=1}^{n} \left(y_k(x) \cdot \int \frac{W_k(x)}{W(x)} \, \mathrm{d}x \right)$$

Dann ist y_s eine spezielle Lösung von (D).

Beispiel (Spezialfall $n = 2$)
Die homogene Gleichung hat die Form

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{H}$$

Sei y_1 eine Lsg von (H) mit $y_1 \neq 0 \forall x \in I$. Sei $z \not\equiv$ eine Lsg von

$$z' = -\left(a_1(x) + \frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}\right) z, \quad \text{so ist}$$

$$y_2(x) := y_1(x) \cdot \int z(x) \, \mathrm{d}x$$

eine weitere Lsg von (H) und y_1, y_2 ist ein FS von (H).

Beweis
Nachrechnen: y_2 ist Lsg von (H).
Aus $y_2' = y_1' \cdot \int z(x) \, \mathrm{d}x + y_1 z(x)$ folgt:

$$\begin{aligned} W(x) &= \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_1(x) \cdot \int z(x) \, \mathrm{d}x \\ y_1'(x) & y_1'(x) \int z(x) \, \mathrm{d}x + y_1 z(x) \end{pmatrix} \\ &= y_1 y_1' \cdot \int z(x) \, \mathrm{d}x + y_1^2 z(x) - y_1 y_1' \cdot \int z(x) \, \mathrm{d}x \\ &= y_1^2 z(x) \end{aligned}$$

Da $z \not\equiv 0$ ist, existiert ein $\xi \in I$ mit $z(\xi) \neq 0$, also $W(\xi) \neq 0$. D.h. y_1, y_2 sind linear unabhängig in $\mathbb{L}$. ■

Beispiele:

(1) Bestimme die allg. Lösung der Gleichung (mit $I = (1, \infty)$)

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2} y' - \frac{2}{1-x^2} y = 0 \tag{$*$}$$

Offensichtlich ist $y_1(x) = x$ eine Lsg von $(*)$ auf I. Die Gleichung erster Ornung lautet:

$$z' = -\left(\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2}{x}\right) z = \frac{2}{x(x^2-1)} z \tag{$**$}$$

Es ist $\int \frac{2}{x(x^2-1)} \, \mathrm{d}x = \log(1 - \frac{1}{x^2})$, daraus ergibt sich die allgemeine Lösung von $(**)$:

$$z(x) = ce^{\log(1-\frac{1}{x^2})} = c(1 - \frac{1}{x^2}) \quad (c \in \mathbb{R})$$

Sei also:

$$y_2(x) := y_1(x) \cdot \int 1 - \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = 1 + x^2$$

Damit ist y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von $(*)$ und die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = c_1 x + c_2(1 + x^2) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

(2) Bestimme die allg. Lösung der Gleichung

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = x^2 - 1 \tag{+}$$

Die allg. Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y(x) = c_1 x + c_2(1+x^2)$$

Es ist also $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = 1 + x^2$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} W(x) &= \det\begin{pmatrix} x & 1+x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} = 2x^2 - (1+x^2) = x^2 - 1 \\ W_1(x) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1+x^2 \\ x^2-1 & 2x \end{pmatrix} = -(1+x^2)(x^2-1) \\ W_2(x) &= \det\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & x^2-1 \end{pmatrix} = x^3 - x \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\frac{W_1(x)}{W(x)} = -1 - x^2 \qquad\qquad \frac{W_2(x)}{W(x)} = x$$

Daraus ergibt sich nun eine spezielle Lösung von (+):

$$y_s(x) = y_1(x) \cdot \int (-1 - x^2)\ \mathrm{d}x + y_2(x) \cdot \int x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2$$

Die allgemeine Lösung von (+) lautet:

$$y(x) = c_1 x + c_2(1+x^2) + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

(3) Löse das

$$\text{AwP}\begin{cases} y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = x^2 - 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung der Dgl lautet:

$$y(x) = c_1 x + c_2(1+x^2) + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Also ist:

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + \frac{2}{3}x^3 - x$$

Außerdem gilt:

$$0 \overset{!}{=} y(0) = c_2 \qquad\qquad 1 \overset{!}{=} y'(0) = c_1$$

Daraus folgt für die Lösung des AwPs:

$$y(x) = x + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2$$

25. Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In diesem Paragraphen sei $n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $b : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Wir betrachten zunächst die **homogene Gleichung**

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0 \tag{H}$$

und geben **ohne** Beweis ein „Kochrezept" an, wie man zu einem FS von (H) kommt.

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

heißt das **charakteristische Polynom** von (H).

Übung:
Ist

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

so ist $\det(\lambda I - A) = p(\lambda)$.

Kochrezept:

(1) Bestimme die verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r (r \leq n)$ von p und deren Vielfachheiten $k_1, \dots, k_r$, also:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ und $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$$M := \{ \lambda_1, \dots, \lambda_m \} \cup \{ \lambda_j \mid m+1 \leq j \leq r, \operatorname{Im}(\lambda_j) > 0 \}$$

(2) Sei $\lambda_j \in M$.
Fall 1: $\lambda_j \in \mathbb{R}$
Dann sind

$$e^{\lambda_j x}, x e^{\lambda_j x}, \dots, x^{k_j - 1} e^{\lambda_j x}$$

k_j linear unabhängige Lösungen von (H).
Fall 2: $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, etwa $\lambda_j = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0)$
Dann sind

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}\cos(\beta x), x e^{\alpha x}\cos(\beta x), \dots, x^{k_j-1} e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ e^{\alpha x}\sin(\beta x), x e^{\alpha x}\sin(\beta x), \dots, x^{k_j-1} e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{aligned}$$

$2k_j$ linear unabhängige Lösungen von (H).

(3) Führt man (2) für jedes $\lambda_j \in M$ durch, so erhält man ein FS von (H).

Beispiele:

(1) Bestimme die allg. Lösung der Gleichung

$$y^{(6)} - 6y^{(5)} + 9y^{(4)} = 0 \tag{$*$}$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^6 - 6\lambda^5 + 9\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda^4(\lambda - 3)^2$$

Sei also:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= 0 & \lambda_2 &:= 3 \\ k_1 &:= 4 & k_2 &:= 2 \end{aligned}$$

Ein FS von $(*)$ lautet: $1, x, x^2, x^3, e^{3x}, xe^{3x}$. Das bedeutet für die allgemeine Lösung von $(*)$:

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^{3x} + c_6xe^{3x} \quad (c_1, \ldots, c_6 \in \mathbb{R})$$

(2) Bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0 \tag{$*$}$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda + i)(\lambda - i)$$

Sei also:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= 2 & \lambda_2 &:= i & \lambda_3 &:= -i \\ k_1 &:= 1 & k_2 &:= 1 & k_3 &:= 1 \end{aligned}$$

Dann ist $M := \{2, i\}$ und ein FS von $(*)$ lautet: $e^{2x}, \cos(x), \sin(x)$. Das bedeutet für die allgemeine Lösung von $(*)$:

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2\cos(x) + c_3\sin(x) \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

(3) Löse das

$$\text{AwP} \begin{cases} y''' - 2y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung der Dgl lautet:

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2\cos(x) + c_3\sin(x)$$

Es ist:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2c_1e^{2x} - c_2\sin(x) + c_3\cos(x) \\ y''(x) &= 4c_1e^{2x} - c_2\cos(x) - c_3\sin(x) \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$0 \overset{!}{=} y(0) = c_1 + c_2 \qquad 1 \overset{!}{=} y'(0) = 2c_1 + c_3 \qquad 0 \overset{!}{=} 4c_1 - c_2$$

Daraus folgt:

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0 \qquad c_3 = 1$$

Also lautet die Lösung des AwPs:

$$y(x) = \sin(x)$$

Wir betrachten auch noch die **inhomogene Gleichung**

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(x) \tag{IH}$$

Definition
$\mu \in \mathbb{C}$ heißt eine **nullfache Nullstelle** von p, genau dann wenn $p(\mu) \neq 0$ ist.

Regel (ohne Beweis):
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, m, q \in \mathbb{N}_0$ und b von der Form:

$$\begin{aligned} b(x) &= (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{, oder} \\ b(x) &= (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{aligned}$$

Ist $\alpha + \beta i$ eine q-fache Nullstelle von p, so gibt es eine spezielle Lösung y_s von (IH) der Form:

$$y_s(x) = x^q e^{\alpha x}\left[(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)\cos(\beta x) + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)\sin(\beta x)\right]$$

Beispiel
Bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y''' - y' = x + 1 \tag{$*$}$$

(1) Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''' - y' = 0 \tag{$**$}$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

Also ist ein FS von $(**)$: $1, e^x, e^{-x}$. Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

(2) Bestimme eine allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $(*)$.
Es ist $m = 1, \alpha = \beta = 0, q = 1$. Ansatz:

$$\begin{aligned} y_s(x) &= x(A_0 + A_1 x) = A_0 x + A_1 x^2 \\ y_s'(x) &= A_0 + 2A_1 x \\ y_s''(x) &= 2A_1 \\ y_s'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Mit Einsetzen in $(*)$ folgt:

$$0 - (A_1 + 2A_1 x) = x + 1$$

Also ist:

$$A_0 = -1 \qquad\qquad A_1 = -\frac{1}{2}$$

D.h. eine spezielle Lösung von (IH) lautet:

$$y_s(x) = -x - \frac{1}{2}x^2$$

Damit lautet die allgemeine Lösung von (IH):

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - x - \frac{1}{2}x^2 \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

A. Satz um Satz (hüpft der Has)

B. Credits für Analysis II

Abgetippt haben die folgenden Paragraphen:
§ 1: Der Raum $\mathbb{R}^n$: Wenzel Jakob, Joachim Breitner
§ 2: Konvergenz im $\mathbb{R}^n$: Joachim Breitner und Wenzel Jakob
§ 3: Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit: Wenzel Jakob, Pascal Maillard
§ 4: Partielle Ableitungen: Joachim Breitner und Wenzel Jakob
§ 5: Differentiation: Wenzel Jakob, Pascal Maillard, Jonathan Picht
§ 6: Differenzierbarkeitseigenschaften reellwertiger Funktionen: Jonathan Picht, Pascal Maillard, Wenzel Jakob
§ 7: Quadratische Formen: Wenzel Jakob
§ 8: Extremwerte: Wenzel Jakob
§ 9: Der Umkehrsatz: Wenzel Jakob und Joachim Breitner
§ 10: Implizit definierte Funktionen: Wenzel Jakob
§ 11: Extremwerte unter Nebenbedingungen: Pascal Maillard
§ 12: Wege im $\mathbb{R}^n$: Joachim Breitner, Wenzel Jakob und Pascal Maillard
§ 13: Wegintegrale: Pascal Maillard und Joachim Breitner
§ 14: Stammfunktionen: Joachim Breitner und Ines Türk
§ 15: Vorgriff auf Analysis III: Rebecca Schwerdt
§ 16: Folgen, Reihen und Potenzreihen in $\mathbb{C}$: Rebecca Schwerdt
§ 17: Normierte Räume, Banachräume, Fixpunktsatz: Rebecca Schwerdt
§ 18: Differentialgleichungen: Grundbegriffe: Rebecca Schwerdt
§ 19: Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung: Rebecca Schwerdt
§ 20: Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen: Rebecca Schwerdt
§ 21: Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung: Peter Pan
§ 22: Lineare Systeme: Rebecca Schwerdt, Peter Pan
§ 23: Homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten
§ 24: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung: Rebecca Schwerdt
§ 25: Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Rebecca Schwerdt