Aufgabe 1

Teilaufgabe a

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotwahl

Lösung:

$$\begin{aligned}
& & A^{(0)} &= \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix} \\
P^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(1)} &= \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & 15 & 13 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-\frac{1}{2}) \quad \cdot(-\frac{1}{3}) \\ + \\ \qquad\quad + \end{array} \\
L^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(2)} &= \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 6 & 17 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ + \end{array} \\
L^{(3)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, & A^{(3)} &= \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$L^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot \underbrace{P^{(1)}}_{=:P} \cdot A^0 = \underbrace{A^{(3)}}_{=:R} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow PA = (L^{(3)} \cdot L^{(2)})^{-1} \cdot R \tag{2}$$

$$\Rightarrow L = (L^{(3)} \cdot L^{(2)})^{-1} \tag{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Nun gilt: $PA = LR = A^{(1)}$ (Kontrolle mit Wolfram|Alpha)

Teilaufgabe b

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 12 \\ 4 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: A auf positive Definitheit untersuchen, ohne Eigenwerte zu berechnen.

Vorüberlegung: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv Definit ...

$$\begin{aligned} \ldots &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Alle Eigenwerte sind größer als } 0 \end{aligned}$$

Falls A symmetrisch ist, gilt:

A ist pos. Definit $\Leftrightarrow$ alle führenden Hauptminore von A sind positiv
$\Leftrightarrow$ es gibt eine Cholesky-Zerlegung $A = GG^T$ mit G ist reguläre untere Dreiecksmatrix

Lösung 1: Hauptminor-Kriterium

$$\det(A_1) = 9 > 0 \tag{5}$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 16 < 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht positiv definit} \tag{7}$$

Lösung 2: Cholesky-Zerlegung

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 3 \tag{8}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{4}{3} \tag{9}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{12}{3} = 4 \tag{10}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{21} - {l_{21}}^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{16}{9}} = \sqrt{-\frac{4}{9}} \notin \mathbb{R} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \text{Es ex. keine Cholesky-Zerlegung, aber } A \text{ ist symmetrisch} \tag{12}$$

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht pos. Definit} \tag{13}$$

Aufgabe 2

Teilaufgabe a

Aufgabe Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode zum Lösen des Gleichungssystems

$$Ly = b,$$

wobei L eine invertierbare, untere Dreiecksmatrix ist.

Geben Sie die Formel zur Berechnung von y_i an.

Lösung:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k}{l_{ii}}$$

Algorithm 1 Calculate y in $Ly = b$

Require: Lower, invertable, triangular Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Vektor b

```
procedure SOLVE(L, b)
    for i ∈ { 1, ... n } do
        y_i ← b_i
        for k ∈ { 1, ..., i − 1 } do
            y_i ← y_i − l_ik · y_k
        end for
        y_i ← y_i / l_ii
    end for
end procedure
```

Teilaufgabe b

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LRx = Pb$$

Algorithm 2 Löse ein LGS $Ax = b$

Require: Matrix A, Vektor b

```
procedure LOESELGS(A, b)
    P, L, R ← LRZER(A)
    b* ← Pb
    c ← VORSUB(L, b*)
    x ← RUECKSUB(R, c)
    return x
end procedure
```

Teilaufgabe c

Der Gesamtaufwand ist:

- LR-Zerlegung, $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n^2$
- Vektormultiplikation, $2n$
- Vorwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$
- Rückwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$

Aufgabe 3

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix}$$

Und jetzt die Berechnung

$$f'(x,y) \cdot (x_0, y_0) = f(x,y)$$

LR-Zerlegung für $f'(x,y)$ kann durch scharfes hinsehen durchgeführt werden, da es in L nur eine unbekannte (links unten) gibt. Es gilt also ausführlich:

$$\begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{12} & 1 \end{pmatrix}}^{L} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}}^{R} \tag{14}$$

$$\Rightarrow r_{11} = 3 \tag{15}$$

$$\Rightarrow r_{12} = \cos y \tag{16}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{12} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\Rightarrow 3x^2 \stackrel{!}{=} l_{12} \cdot 3 + 1 \cdot 0 \tag{18}$$

$$\Leftrightarrow l_{12} = x^2 \tag{19}$$

$$\Rightarrow e^y \stackrel{!}{=} x^2 \cdot \cos y + 1 \cdot r_{22} \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow r_{22} = -x^2 \cdot \cos y + e^y \tag{21}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 0 & -x^2 \cdot \cos y + e^y \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$P = I_2 \tag{23}$$

$$-f(\frac{-1}{3}, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{27} \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{27} \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{27} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Aufgabe 4

Aufgabe:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

1. Integrand am linken und am rechten Rand interpolieren
2. Interpolationspolynom mit Quadraturformel integrieren

Lösung:

Stützstellen:

$$(a, f(a)) \text{ und } (b, f(b))$$

$\Rightarrow$ Polynom 1. Grades interpoliert diese
$\Rightarrow$ Gerade $y = m \cdot x + t$ interpoliert

$$f(a) = a \cdot m + t \tag{27}$$
$$f(b) = b \cdot m + t \tag{28}$$
$$\Leftrightarrow t = f(a) - ma \tag{29}$$
$$t = f(b) - mb \tag{30}$$
$$\Rightarrow f(a) - ma = f(b) - mb \tag{31}$$
$$\Leftrightarrow f(a) - f(b) = ma - mb \tag{32}$$
$$\overset{a \neq b}{\Leftrightarrow} m = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \tag{33}$$
$$\Rightarrow t = f(a) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \cdot a \tag{34}$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{f(a) \cdot a - f(a) \cdot b - f(a) \cdot a - f(b) \cdot a}{a - b} \tag{35}$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{-f(a) \cdot b - f(b) \cdot a}{a - b} \tag{36}$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{f(a) \cdot b + f(b) \cdot a}{b - a} \tag{37}$$

Das Interpolationspolynom $p(x)$ lautet also

$$p(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \cdot x + \frac{f(a) \cdot b + f(b) \cdot a}{b - a}$$

Für Polynome ersten Grades benötigt man eine Quadraturformel vom Grad 2 (also NICHT die Rechteckregel).

Lösung 1: Mittelpunktsregel Die Mittelpunktsregel lautet

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a+\frac{1}{2}(b-a))$$

Damit ergibt sich

$$I(f) \approx (b-a)\underbrace{(\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\cdot(a+\frac{1}{2}(b-a))+\frac{f(a)\cdot b+f(b)\cdot a}{b-a})}_{p(a+\frac{1}{2}(b-a))}$$

Lösung 2: Trapezregel Die Trapezregel lautet

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left(\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\right)$$

TODO: Mache das, wer will.

Teilaufgabe b)

Sei nun $f(x) = x^2$ und $a = 0$ sowie $b = 4$. Man soll die ermittelte Formel zwei mal auf äquidistanten Intervallen anwenden.

Lösung:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{b-a}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{b-a}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x \tag{38}$$

$$\int_0^4 x^2\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\mathrm{d}x + \int_2^4 x^2\mathrm{d}x \tag{39}$$

$$\int_0^2 x^2\mathrm{d}x \approx (2-0)(\frac{f(0)-f(2)}{0-2}\cdot(0+\frac{1}{2}(2-0))+\frac{f(0)\cdot 2+f(2)\cdot 0}{2-0}) \tag{40}$$

$$= 2\cdot\frac{-4}{-2} = 2 \tag{41}$$

$$\int_2^4 x^2\mathrm{d}x \approx (4-2)(\frac{f(2)-f(4)}{2-4}\cdot(2+\frac{1}{2}(4-2))+\frac{f(2)\cdot 4+f(4)\cdot 2}{4-2}) \tag{42}$$

$$= \text{TODO} \tag{43}$$

Aufgabe 5

Teilaufgabe a

Eine Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1,\dots,s}$ hat die Ordnung p, falls sie exakte Lösungen für alle Polynome vom Grad $\leq p-1$ liefert.

Teilaufgabe b

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q} \text{ für } q = 1, \dots, p$$

Teilaufgabe c

Aufgabe Bestimmen Sie zu den Knoten $c_1 = 0$ und $c_2 = \frac{2}{3}$ Gewichte, um eine Quadraturformel maximaler Ordnung zu erhalten. Wie hoch ist die Ordnung?

Lösung Als erstes stellen wir fest, dass die Knoten nicht symmetrisch (d.h. gespiegelt bei $\frac{1}{2}$) sind. TODO: Warum ist das wichtig?

$\overset{\text{Satz 28}}{\Rightarrow}$ Wenn wir Ordnung $s = 2$ fordern, sind die Gewichte eindeutig bestimmt.

Da $c_1 = 0$ kann es sich nicht um die Gauß-QF handeln. Somit können wir nicht Ordnung 4 erreichen.

Nach VL kann bei Vorgabe von s Knoten auch die Ordnung s durch geschickte Wahl der Gewichte erreicht werden. Also berechnen wir die Gewichte, um die Ordnung 2 zu sichern:

$$b_i = \int_0^1 L_i(x)\mathrm{d}x \tag{44}$$
$$b_1 = \frac{1}{4} \tag{45}$$
$$b_2 = \frac{3}{4} \tag{46}$$

Diese Gewichte b_1, b_2 erfüllen die 1. und 2. Ordnungsbedingung.

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{2} b_i \cdot c_i^2 \tag{47}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} \tag{48}$$

$$= \frac{1}{3} \tag{49}$$

Damit ist auch die 3. Ordnungsbedingung und mit den Knoten maximale Ordnung erfüllt.