1 Lineare Algebra I

Definition 1: injektiv, surjektiv und bijektiv

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

(a) f heißt **surjektiv** $:\Leftrightarrow f(A) = B$

(b) f heißt **injektiv** $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(c) f heißt **bijektiv** $:\Leftrightarrow f$ ist surjektiv und injektiv

Definition 2: Relation

Seien A und B Mengen. $R \subseteq A \times B$ heißt **Relation**.

Definition 3: Ordnungsrelation

Eine Relation $\leq$ heißt Ordnungsrelation in A und $(A, \leq)$ heißt (partiell) geordnete Menge, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:

O1 $a \leq a$ (reflexiv)

O2 $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$ (antisymmetrisch)

O3 $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (transitiv)

$(A, \leq)$ heißt total geordnet $:\Leftrightarrow \forall a, b, \in A : a \leq b \vee b \leq a$

Definition 4: Äquivalenzrelation

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation. R heißt Äquivalenzrelation, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:

Ä1 aRa (reflexiv)

Ä2 $aRb \Rightarrow bRa$ (symmetrisch)

Ä3 $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ (transitiv)

Definition 5: Assoziativität

Sei A eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf A.
A heißt **assoziativ** $:\Leftrightarrow \forall a, b, c \in A : (a * b) * c = a * (b * c)$

Definition 6: Gruppe

Sei G eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf G.
$(G, *)$ heißt **Gruppe** $:\Leftrightarrow$

G1 $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$ (assoziativ)

G2 $\exists e \in G \forall a \in G : e * a = a = a * e$ (neutrales Element)

G3 $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$ (inverses Element)

Definition 7: abelsche Gruppe

Sei $(G, *)$ eine Gruppe. $(G, *)$ heißt **abelsche Gruppe** $:\Leftrightarrow$

G4 $\forall a, b \in G : a * b = b * a$ (kommutativ)

Definition 8: Ring

Sei R eine Menge und + sowie *cdot* Verknüpfungen auf R.
$(R, +, \cdot)$ heißt **Ring** $:\Leftrightarrow$

R1 $(R, +)$ ist abelsche Gruppe

R2 $\cdot$ ist assoziativ

R3 Distributivgesetze: $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Definition 9: Nullteiler

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.
$a \in R$ heißt (linker) **Nullteiler** $:\Leftrightarrow a \neq 0 \wedge \exists b : a \cdot b = 0$

Definition 10: Ringhomomorphismus

Seien $(R_1, +, \cdot)$ und $(R_2, +, \cdot)$ Ringe und $\Phi : R_1 \to R_2$ eine Abbildung.
Φ heißt **Ringhomomorphismus** $:\Leftrightarrow \forall x, y \in R_1 : \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ und $\Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$

Definition 11: Körper

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Ring.
$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ heißt **Körper** $:\Leftrightarrow (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

Definition 12: Charakteristik

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper.
Falls es ein $m \in N^+$ gibt, sodass

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m \text{ mal}} = 0$$

gilt, so heißt die kleinste solche Zahl p die Charakteristik (char $\mathbb{K}$) von $\mathbb{K}$. Gibt es kein solches m, so habe $\mathbb{K}$ die Charaktersitik 0.

Definition 13: Vektorraum

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper und V eine Menge mit einer Addition

$$+ : V \times V \to V, (x, y) \mapsto x + y$$

und einer skalaren Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V, (\lambda, x) \mapsto \lambda \times x$$

heißt $\mathbb{K}$-Vektorraum, falls gilt:

Definition 13: Vektorraum (cont.)

V1 $(V, +)$ ist abelsche Gruppe

V2 für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $x, y \in V$ gilt:

(a) $1 \cdot x = x$

(b) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$

(c) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

(d) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

Definition 14: Lineare Unabhängigkeit

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Endlich viele Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$ heißen **linear unabhängig**, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

2 Lineare Algebra II

Definition 15: Bilinearform

Sei V ein reeler Vektorraum. Eine **Bilinearform** auf V ist eine Abbildung

$$F : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto F(a, b),$$

die in jedem Argument linear ist, d.h. für alle $a, a_1, a_2, b, b_1, b2 \in V$ und alle $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2, b) = \lambda_1 \cdot F(a_1, b) + \lambda_2 \cdot F(a_2, b)$$
$$F(a, \mu_1 \cdot b_1 + \mu_2 \cdot b_2) = \mu_1 \cdot F(a, b_1) + \mu_2 \cdot F(a, b_2)$$

Definition 16: symmetrische Bilinearform

Sei F eine Bilinearform.
F heißt **symmetrisch** $:\Leftrightarrow F(a, b) = F(b, a)$.

Definition 17: positiv definite Bilinearform

Sei F eine Bilinearform.
F heißt **positiv definit** $:\Leftrightarrow \forall a \in V : F(a, a) \geq 0 \wedge (F(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0)$.

Definition 18: Skalarprodukt

Für reele Vektorräume gilt:
Eine symmetrische, positiv definite Bilinearform heißt **Skalarprodukt**.

Definition 19: euklidischer Vektorraum

Sei V ein reeler Vektorraum und F ein Skalarprodukt auf V. Dann heißt (V, F) ein **euklidischer Vektorraum**.

Definition 20: Hermitesche Form

Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung

$$F : V \times V \to \mathbb{C}, \quad (a, b) \mapsto F(a, b)$$

heißt **hermitesche Form** auf V, falls für alle a, a_1, a_2, b und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$F(\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2, b) = \lambda_1 \cdot F(a_1, b) + \lambda_2 \cdot F(a_2, b)$$
$$F(b, a) = \overline{F(a, b)}$$

Definition 21: Skalarprodukt

Für komplexe Vektorräume gilt:
Eine symmetrische, positiv definite Hermitesche Form heißt **Skalarprodukt**.

Definition 22: unitärer Vektorraum

Sei V ein komplexer Vektorraum und F ein Skalarprodukt auf V. Dann heißt (V, F) ein **unitärer Vektorraum**.

Definition 23: hermitesche Matrix

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix.
A heiß hermitesch $:\Leftrightarrow \overline{A}^\top = A$

Definition 24: positiv definite Matrix

Sei A eine symmetrische (bzw. hermitesche) Matrix.
A heißt **positiv definit** $:\Leftrightarrow x^\top G x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ bzw. $z^\top G \overline{z} > 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n, z \neq 0$.

Satz 24: Cauchy-Schwarz Ungleichung

In einem euklidischen oder unitären Vektorraum $V, \langle , \rangle$ gilt für alle $a, b \in V$

$$|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn a und b linear abhängig sind.

Definition 25: Norm

Sei V ein reeler oder komplexer Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Funktion

$$\|\| : V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

mit folgenden Eigenschaften:
Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und alle $a, b \in V$ gilt:

(i) $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$ (homogen)

(ii) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (Dreiecks-Ungleichung)

(iii) $\|a\| \geq 0 \wedge \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (positiv definit)

Satz 25: induzierte Norm

Es sei $V, \langle , \rangle$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Dann ist die Funktion

$$\|\| : V \to \mathbb{R} \text{ definiert durch } \|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle}$$

eine Norm.

Satz 25: Parallelogramm-Identität

(a) Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit zugehöriger Norm $\|\|$. Dann gilt die **Parallelogramm-Identität**, d.h. für alle $a, b \in V$ ist

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

Satz 25: Parallelogramm-Identität (cont.)

(b) Ist umgekehrt $\|\|$ eine Norm auf einem reelen Vektorraum V, die die Parallelogramm-Identität erfüllt, so existiert ein Skalarprodukt $\langle,\rangle$ auf V mit $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ für alle $a \in V$.

Definition 26: Metrik

Für eine beliebige Menge M heißt eine Funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$ eine **Metrik**, wenn d die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $\forall p, q \in M : d(p, q) = d(q, p)$ (symmetrie)

(ii) $\forall p, q, r \in M : d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ (Dreiecks-Ungleichung)

(iii) $\forall p, q \in M : d(p, q) \geq 0$ und $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ (positiv definit)

Das Paar (M, d) heißt dann **metrischer Raum**.

Definition 27: diskrete Metrik

Sei M eine Menge. Dann ist die diskrete Metrik definiert durch:

$$d(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p = q \\ 1 & \text{falls } p \neq q \end{cases}$$

Satz 27: Norm induziert Metrik

Ein normierter Vektorraum ist ein metrischer Vektorraum.

Definition 28: Cosinus

$$\cos \omega(a, b) = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

Definition 29: orthogonalität von Vektoren

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $a, b \in V$.

$$a \perp b :\Leftrightarrow \langle a, b\rangle = 0$$

Definition 30: Pythagoras

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Dann gilt in V:

$$a \perp b \Rightarrow \|a\| + \|b\| = \|a + b\|^2$$

Definition 31: Orthogonalkomplement

Die Menge $U^\perp := \{x \in V | \langle x, u\rangle = 0 \;\; \forall u \in U\}$ heißt **Orthogonalkomplement** von U in V.

Definition 32: Orthogonalprojektion

Die **Orthogonalprojektion** von V auf U (in Richtung $U^{\perp}$) ist die Abbildung

$$\pi_U : V \to U \subseteq V, \quad v = u + u^{\perp} \mapsto u.$$

Satz 32: Eigenschaften der Orthogonalprojektion

Für die Orthogonalprojektion π_U eines Vektorraumes V auf einen Unterraum U gilt:

1. π_U ist linear und $\pi_U^2 = \pi_U \circ \pi_U = \pi_U$.
2. Bild $\pi_U = U$, Kern $\pi_U = U^{\perp}$.
3. π_U verkürzt Abstände: Für alle $v, w \in V$ gilt:
   $d(\pi_U(v), \pi_U(w)) = \|\pi_U(v) - \pi_U(w)\| \leq \|v - w\| = d(v, w)$

Definition 33: Abstand

Seien (M, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq M$ zwei Teilmengen. Der **Abstand** von A und B ist definiert durch

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Definition 34: orthogonale und unitäre Matrizen

Eine reele bzw. komplexe $n \times n$-Matrix A heißt **orthogonal** bzw. **unitär**, falls gilt

$$A^{\top} A = E_n \quad \text{bzw.} \quad A^{\top} \overline{A} = E_n$$

Satz 34: Charakterisierung von orthogonalen Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) A ist eine orthogonale Matrix.

(b) A ist regulär und $A^{-1} = A^{\top}$.

(c) Die Spaltenvektoren (bzw. die Zeilenvektoren) von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bzgl. des Standardskalarproduktes

Analog für unitäre Matrizen.

Satz 34: Folgerungen

(a) Für eine orthogonale Matrix A gilt: $\det A = \pm 1$.

(b) Für eine unitäre Matrix gilt: $|\det A| = 1$.

Definition 35: Adjungierte lineare Abbildung

Es seien $(V, \langle,\rangle_V)$ und $(W, \langle,\rangle_W)$ zwei Vektorräume mit Skalarprodukt und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Eine lineare Abbildung $\Phi^* : W \to V$ heißt zu Φ **adjungierte lineare Abbildung**, falls für alle $x \in V$ und alle $y \in W$ gilt:

$$\langle \Phi(x), y\rangle_W = \langle x, \Phi^*(y)\rangle_V$$

Satz 35: Spektralsatz

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $\Phi : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann ist Φ diagonalisierbar.

Genauer: Es exisitiert eine Orthonormalbasis B von V, die aus Eigenvektoren von Φ besteht und die Abbildung von Φ bzgl. dieser Orthonormalbasis hat Diagonalform

$$M_B^B(\Phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die n (reelen) Eigenwerte von Φ sind.

Satz 35: Kriterium für "positiv definit"

Sei A eine reele, symmetrische Matrix.
A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv.