

Aufgabe 31

Gesucht:

Eine Quadraturformel maximaler Ordnung mit:

$$s = 3 \quad (1)$$

$$c_1 = 0 \quad (2)$$

$$c_3 = 1 \quad (3)$$

$$(4)$$

Lösung:

Nach Satz 28 können Ordnungen $\geq s = 3$ erreicht werden.

Die Ordnung kann nach Satz 31 höchstens $2s = 6$ sein. Da $c_1 = 0$ ist, kann es jedoch keine Gauß-Quadraturformel sein. Also kann die Ordnung höchstens 5 sein.

Ordnung 5

Es gibt mindestens zwei Möglichkeiten, zu zeigen, dass es keine QF der Ordnung 5 mit den Knoten $c_1 = 0$ und $c_3 = 1$ gibt: Mit Hilfe von Satz 29 oder über die Ordnungsbedingungen.

Mit Satz 29

$$M(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \quad (5)$$

$$= x(x - c_2)(x - 1) \quad (6)$$

$$= (x^2 - x)(x - c_2) \quad (7)$$

$$= x^3 - (1 + c_2)x^2 + c_2x \quad (8)$$

$$\int_0^1 M(x) \cdot g(x) dx \stackrel{!}{=} 0 \quad (9)$$

Da wir Ordnung $5 = s + 2$ erreichen wollen, muss g ein beliebiges Polynom vom Grad $\leq 2 - 1 = 1$ sein. Also:

$$g(x) = ax + b \quad (10)$$

$$M(x) \cdot g(x) = ax^4 + (b - a - ac_2)x^3 + (ac_2 - bc_2 - b)x^2 + bc_2x \quad (11)$$

$$\int_0^1 M(x)g(x)dx = \frac{a}{5} + \frac{b - a - ac_2}{4} + \frac{ac_2 - bc_2 - b}{3} + \frac{bc_2}{2} \quad (12)$$

$$= \frac{ac_2}{12} - \frac{a}{20} + \frac{bc_2}{6} - \frac{b}{12} \quad (13)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{ac_2}{12} - \frac{a}{20} + \frac{bc_2}{6} - \frac{b}{12} \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow 0 \stackrel{!}{=} 5ac_2 - 3a + 10bc_2 - 5b \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow -5ac_2 - 10bc_2 \stackrel{!}{=} -3a - 5b \quad (16)$$

$$\Leftrightarrow 5ac_2 + 10bc_2 \stackrel{!}{=} 3a + 5b \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow c_2(5a + 10b) \stackrel{!}{=} 3a + 5b \quad (18)$$

$$\Leftrightarrow c_2 \stackrel{!}{=} \frac{3a + 5b}{5a + 10b} \quad (19)$$

Da diese Bedingung für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelten soll, muss sie auf jeden Fall für $a = 1, b = 0$ sowie für $a = 1, b = 1$ gelten. Aber:

$$\frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 0}{5 \cdot 1 + 10 \cdot 0} = \frac{3}{5} \neq \frac{8}{15} = \frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{5 \cdot 1 + 10 \cdot 1} \quad (20)$$

Offensichtlich gibt also es kein c_2 , dass diese Bedingung für jedes $a, b \in \mathbb{R}$ erfüllt. Daher kann es keine Quadraturformel der Ordnung 5 mit den Knoten 0 und 1 geben.

Mit Ordnungsbedingungen Wir kennen $c_1 = 0$ und $c_3 = 1$, was die Ordnungsbedingungen sehr vereinfacht:

$$1 \stackrel{!}{=} b_1 + b_2 + b_3 \quad (21)$$

$$1/2 \stackrel{!}{=} b_2 \cdot c_2 + b_3 \quad (22)$$

$$1/3 \stackrel{!}{=} b_2 \cdot c_2^2 + b_3 \quad (23)$$

$$1/4 \stackrel{!}{=} b_2 \cdot c_2^3 + b_3 \quad (24)$$

$$1/5 \stackrel{!}{=} b_2 \cdot c_2^4 + b_3 \quad (25)$$

Aus 22 folgt:

$$c_2 = \frac{1/2 - b_3}{b_2} \quad (26)$$

Und damit:

$$1/3 \stackrel{!}{=} b_2 \cdot \left(\frac{1/2 - b_3}{b_2} \right)^2 + b_3 \quad (27)$$

$$= \frac{(1/2 - b_3)^2}{b_2} + b_3 \quad (28)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}b_2 - b_2b_3 = (1/2 - b_3)^2 \quad (29)$$

$$\Leftrightarrow b_2\left(\frac{1}{3} - b_3\right) = (1/2 - b_3)^2 \quad (30)$$

$$\Leftrightarrow b_2 = \frac{(1/2 - b_3)^2}{\frac{1}{3} - b_3} \quad (31)$$

Nun könnte man das ganze in die 4. Ordnungsbedingung einsetzen ... aber ich glaube nicht, dass das schön wird. Mache das, wer will.

Ordnung 4

Die Simpson-Regel erfüllt offensichtlich alle Bedingungen und hat Ordnung 4:

$$c_2 = 1/2 \quad (32)$$

$$b_1 = 1/6 \quad (33)$$

$$b_2 = 4/6 \quad (34)$$

$$b_3 = 1/6 \quad (35)$$

Dass die Simpson-Regel Ordnung 4 hat, lässt sich schnell über die Ordnungsbedingungen zeigen.