Aufgabe 1

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: $Ax = b$ mit Gaußelimination und Spaltenpivotwahl lösen

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \frac{1}{6} \\ \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \quad \cdot(-2) \\ + \\ + \end{matrix} \tag{1}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot \frac{1}{6} \quad -4 \\ + \end{matrix} \tag{3}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot \frac{3}{4} \end{matrix} \tag{4}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \cdot \frac{-1}{6} \end{matrix} \tag{5}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{6}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$ löst das LGS.

Aufgabe 2

Die *Kondition* eines Problems ist die Frage, wie sich kleine Störungen der Eingabegrößen unabhängig vom gewählten Algorithmus auf die Lösung des Problems auswirken.

Bei dem lösen von linearen Gleichungssystemen sind die Eingabegrößen die Koeffizientenmatrix A und der Vektor b.

Der Begriff *Stabilität* ist auf einen konkreten Algorithmus zu beziehen und beschäftigt sich mit der Frage, wie sich Rundungsfehler, welche während der Durchführung des Algorithmus entstehen, auf die Lösung auswirken.

Die Stabilität eines Algorithmus bezeichnet, wie stark der Algorithmus das Ergebnis verfälschen kann. Man kann also die Stabilität der Gauß-Elimination angeben. Man kann allerdings nicht von einer Stabilität des Problems $A \cdot x = b$ sprechen.

Aufgabe 3

Diese Aufgabe ist identisch zu Aufgabe 3, Klausur3. Die Lösung ist bei Klausur3 zu finden.

Aufgabe 4

Diese Aufgabe ist identisch zu Aufgabe 3, Klausur2. Die Lösung ist bei Klausur2 zu finden.

Aufgabe 5

Teilaufgabe a

Eine Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1,\dots,s}$ hat die Ordnung p, falls sie exakte Lösungenfür alle Polynome vom Grad $\leq p-1$ liefern.[1]

Die Ordnungsbedinungen liefern ein hinreichendes Kriterium zum Überprüfen der Ordnung einer Quadraturformel.

Für die Mittelpunktsregel $c_1 = \frac{1}{2}, b_1 = 1$ gilt:

$$\frac{1}{1} \stackrel{?}{=} b_1 = 1 \checkmark \tag{8}$$

$$\frac{1}{2} \stackrel{?}{=} b_1 c_1 = \frac{1}{2} \checkmark \tag{9}$$

$$\frac{1}{3} \stackrel{?}{=} b_1 c_1^2 = \frac{1}{4} ✗ \tag{10}$$

Die Ordnung der Mittelpunktsregel ist also $p = 2$.

Teilaufgabe b

Aufgabe: Das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+4x} \mathrm{d}x$$

soll näherungsweise mit der Mittelpunktsregel, angwendet auf eine äquistante Unterteilung des Intervalls $[0, 1]$ in zwei Teilintervalle angewendet werden.

Lösung:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x} \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1+4x} \mathrm{d}x \tag{11}$$

$$\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+4\cdot\frac{3}{4}} \tag{12}$$

$$= \frac{3}{8} \tag{13}$$

[1] Kapitel 4, S. 4 des Skripts