Aufgabe 1

Teilaufgabe a

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotwahl

Lösung:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & 15 & 13 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-\frac{1}{2}) \quad \cdot(-\frac{1}{3}) \\ + \\ \qquad\quad + \end{array}$$

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 6 & 17 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ + \end{array}$$

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$L^{(2)} \cdot L^{(1)} \cdot \underbrace{P^{(1)}}_{=:P} \cdot A^0 = \underbrace{A^{(3)}}_{=:R} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow PA = (L^{(2)} \cdot L^{(1)})^{-1} \cdot R \tag{2}$$

$$\Rightarrow L = (L^{(2)} \cdot L^{(1)})^{-1} \tag{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Nun gilt: $PA = LR = A^{(1)}$ (Kontrolle mit Wolfram|Alpha)

Teilaufgabe b

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 12 \\ 4 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: A auf positive Definitheit untersuchen, ohne Eigenwerte zu berechnen.

Vorüberlegung: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit ...

$$\begin{aligned} \ldots &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{ 0 \} : x^T A x > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Alle Eigenwerte sind größer als } 0 \end{aligned}$$

Falls A symmetrisch ist, gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist positiv definit} &\Leftrightarrow \text{alle führenden Hauptminore von } A \text{ sind positiv} \\ &\Leftrightarrow \text{es gibt eine Cholesky-Zerlegung } A = GG^T \end{aligned}$$

Lösung 1: Hauptminor-Kriterium

$$\det(A_1) = 9 > 0 \tag{5}$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 16 < 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht positiv definit} \tag{7}$$

Lösung 2: Cholesky-Zerlegung

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 3 \tag{8}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{4}{3} \tag{9}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{12}{3} = 4 \tag{10}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - {l_{21}}^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{9}} = \sqrt{-\frac{7}{9}} \notin \mathbb{R} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \text{Es ex. keine Cholesky-Zerlegung, aber } A \text{ ist symmetrisch} \tag{12}$$

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht positiv definit} \tag{13}$$

Aufgabe 2

Teilaufgabe a

Aufgabe Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode zum Lösen des Gleichungssystems

$$Ly = b,$$

wobei L eine invertierbare, untere Dreiecksmatrix ist.

Geben Sie die Formel zur Berechnung von y_i an.

Lösung:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k}{l_{ii}}$$

Algorithm 1 Calculate y in $Ly = b$

Require: Lower, invertable, triangular Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Vektor b

```
procedure SOLVE(L, b)
    for i ∈ { 1, ... n } do
        y_i ← b_i
        for k ∈ { 1, ..., i − 1 } do
            y_i ← y_i − l_ik · y_k
        end for
        y_i ← y_i / l_ii
    end for
end procedure
```

Teilaufgabe b

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LRx = Pb$$

Algorithm 2 Löse ein LGS $Ax = b$

Require: Matrix A, Vektor b

```
procedure LoeseLGS(A, b)
    P, L, R ← LRZer(A)
    b* ← P · b
    c ← VorSub(L, b*)
    x ← RueckSub(R, c)
    return x
end procedure
```

Teilaufgabe c

Der Gesamtaufwand ist:

- LR-Zerlegung, $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n^2$
- Vektormultiplikation, $2n$
- Vorwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$
- Rückwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$

Aufgabe 3

Die Jacobi-Matrix von f lautet:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix}$$

Hierfür wurde in in der ersten Spalte nach x abgeleitet und in der zweiten Spalte nach y.

Eine Iteration des Newton-Verfahren ist durch

$$x_{k+1} = x_k \underbrace{-f'(x_k)^{-1} \cdot f(x_k)}_{\Delta x} \tag{14}$$

gegeben (vgl. Skript, S. 35).

Zur praktischen Durchführung lösen wir

$$f'(x_0, y_0)\Delta x = -f(x_0, y_0) \tag{15}$$

$$L \cdot \underbrace{R \cdot \Delta x}_{=:c} = -f(x_0, y_0) \tag{16}$$

mit Hilfe der LR Zerlegung nach Δx auf.

Lösungsvorschlag 1 (Numerische Lösung)

$$f'(x_0, y_0) = L \cdot R \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow f'(-1/3, 0) = L \cdot R \tag{18}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix}}^{=:L} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \frac{8}{9} \end{pmatrix}}^{=:R} \tag{19}$$

$$L \cdot c = -f(x_0, y_0) \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix} \cdot c = -\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{26}{27} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\Rightarrow c = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{20}{27} \end{pmatrix}^1 \tag{22}$$

$$R \cdot \Delta x = c \tag{23}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \cdot \Delta x = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{20}{27} \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -7 \\ -15 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Anschließend berechnen wir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \Delta x \tag{26}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -7 \\ -15 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/18 \\ -15/18 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Lösungsvorschlag 2 (Analytische Lösung)

LR-Zerlegung für $f'(x, y)$ kann durch scharfes hinsehen durchgeführt werden, da es in L nur eine Unbekannte links unten gibt. Es gilt also ausführlich:

$$\begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{12} & 1 \end{pmatrix}}^{L} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}}^{R} \tag{29}$$

$$\Rightarrow r_{11} = 3 \tag{30}$$

$$\Rightarrow r_{12} = \cos y \tag{31}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{12} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$\Rightarrow 3x^2 \overset{!}{=} l_{12} \cdot 3 + 1 \cdot 0 \tag{33}$$

$$\Leftrightarrow l_{12} = x^2 \tag{34}$$

$$\Rightarrow e^y \overset{!}{=} x^2 \cdot \cos y + 1 \cdot r_{22} \tag{35}$$

$$\Leftrightarrow r_{22} = -x^2 \cdot \cos y + e^y \tag{36}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 0 & -x^2 \cdot \cos y + e^y \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$P = I_2 \tag{38}$$

[1] Dieser Schritt wird durch Vorwärtssubsitution berechnet.

Aufgabe 4

Aufgabe:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

1. Integrand am linken und am rechten Rand interpolieren
2. Interpolationspolynom mit Quadraturformel integrieren

Lösung:

Nutze Interpolationsformel von Lagrange:

$$L_i = \frac{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(x_i - x_j)} \tag{39}$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{1} f_i \cdot L_i(x) \tag{40}$$

Berechne Lagrangepolynome:

$$L_0(x) = \frac{x-b}{a-b} \tag{41}$$

$$L_1(x) = \frac{x-a}{b-a} \tag{42}$$

So erhalten wir:

$$p(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} \tag{43}$$

$$= \frac{f(a)(b-x) + f(b)(x-a)}{b-a} \tag{44}$$

$$= \frac{f(a)b - f(a)x + f(b)x - f(b)a}{b-a} \tag{45}$$

$$= \frac{x \cdot (f(b) - f(a)) + f(a)b - f(b)a}{b-a} \tag{46}$$

$$= x \cdot \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{=:r} + \underbrace{\frac{f(a)b - f(b)a}{b-a}}_{=:s} \tag{47}$$

Nun integrieren wir das Interpolationspolynom:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b p(x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{r}{2}x^2 + sx\right]_a^b && (48)\\
&= \left(\frac{a^2r}{2} + sa\right) - \left(\frac{b^2r}{2} + sb\right) && (49)\\
&= a\left(\frac{ar}{2} + s\right) - b\left(\frac{br}{2} + s\right) && (50)\\
&= a\left(\frac{a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{2} + \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a}\right) - b\left(\frac{b\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{2} + \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a}\right) && (51)\\
&= a\left(\frac{-af(a) + 2bf(a) - af(b)}{2\cdot(b-a)}\right) - b\left(\frac{bf(b) + bf(a) - 2af(b)}{2\cdot(b-a)}\right) && (52)\\
&\ldots \text{theoretisch sollte das zu } (b-a)(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}) \text{ zu vereinfachen sein} && (53)
\end{aligned}
$$

Alternativer Rechenweg

$$
\begin{aligned}
\int_a^b p(x)dx &= \int_a^b f(a)\frac{x-b}{a-b}dx + \int_a^b f(b)\frac{x-a}{b-a}dx\\
= \int_a^b \frac{f(a)\cdot x}{a-b}dx &- \int_a^b \frac{f(a)\cdot b}{a-b}dx + \int_a^b \frac{f(b)\cdot x}{b-a}dx - \int_a^b \frac{f(b)\cdot a}{b-a}dx\\
= \frac{1}{2}\cdot\frac{f(a)\cdot b^2}{a-b} &- \frac{1}{2}\cdot\frac{f(a)\cdot a^2}{a-b} - \frac{f(a)\cdot b^2}{a-b} + \frac{f(a)\cdot b\cdot a}{a-b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{f(b)\cdot b^2}{b-a}\\
&- \frac{1}{2}\cdot\frac{f(b)\cdot a^2}{b-a} - \frac{f(b)\cdot a\cdot b}{b-a} + \frac{f(b)\cdot a^2}{b-a}\\
&= (b-a)\cdot(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2})
\end{aligned}
$$

Betrachtet man nun die allgemeine Quadraturformel,

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{s} b_i f(a + c_i(b-a))$$

so gilt für die hergeleitete Quadraturformel also $s = 2$, $c_1 = 0, c_2 = 1$ und $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$. Sie entspricht damit der Trapezregel.

Teilaufgabe b)

Sei nun $f(x) = x^2$ und $a = 0$ sowie $b = 4$. Man soll die ermittelte Formel zwei mal auf äquidistanten Intervallen anwenden.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 p(x)\mathrm{d}x &= \int_0^2 p(x)\mathrm{d}x + \int_2^4 p(x)\mathrm{d}x && (54)\\
&= (2-0)\cdot\left(\frac{0}{2}+\frac{4}{2}\right) + (4-2)\cdot\left(\frac{4}{2}+\frac{16}{2}\right) && (55)\\
&= 2\cdot 2 + 2\cdot(2+8) && (56)\\
&= 24 && (57)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5

Teilaufgabe a

Eine Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1,\dots,s}$ hat die Ordnung p, falls sie exakte Lösungen für alle Polynome vom Grad $\leq p-1$ liefert.

Teilaufgabe b

Die Ordnungsbedingungen, mit denen man zeigen kann, dass eine Quadraturformel mindestens Ordnung p hat, lautet:

$$\forall p \in \{ 1, \dots, p \} : \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q}$$

Teilaufgabe c

Aufgabe Bestimmen Sie zu den Knoten $c_1 = 0$ und $c_2 = \frac{2}{3}$ Gewichte, um eine Quadraturformel maximaler Ordnung zu erhalten. Wie hoch ist die Ordnung?

Lösung Nach VL kann bei Vorgabe von s Knoten auch die Ordnung s durch geschickte Wahl der Gewichte erreicht werden. Nach Satz 27 ist diese Wahl eindeutig. Also berechnen wir die Gewichte, um die Ordnung $p = 2$ zu sichern.

Dazu stellen wir zuerst die Lagrange-Polynome auf:

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - c_2}{c_1 - c_2} = \frac{x - 2/3}{-2/3} = -\frac{3}{2}x + 1 \tag{58}$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - c_1}{c_2 - c_1} = \frac{x}{2/3} = \frac{3}{2}x \tag{59}$$

Nun gilt für die Gewichte:

$$b_i = \int_0^1 L_i(x) \mathrm{d}x \tag{60}$$

$$b_1 = \int_0^1 -\frac{3}{2}x + 1 \mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{4}x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{4} \tag{61}$$

$$b_2 = \frac{3}{4} \tag{62}$$

Nun sind die Ordnungsbedingungen zu überprüfen:

$$\begin{aligned}
{}^1\!/\!_1 &\stackrel{?}{=} b_1c_1^0 + b_2c_2^0 = {}^1\!/\!_4 + {}^3\!/\!_4 \ \checkmark && (63)\\
{}^1\!/\!_2 &\stackrel{?}{=} b_1c_1^1 + b_2c_2^1 = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} \ \checkmark && (64)\\
{}^1\!/\!_3 &\stackrel{?}{=} b_1c_1^2 + b_2c_2^2 = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9} \ \checkmark && (65)\\
{}^1\!/\!_4 &\stackrel{?}{=} b_1c_1^3 + b_2c_2^3 = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{27} \ \times && (66)\\
& && (67)
\end{aligned}$$

Die Quadraturformel mit den Knoten $c_1 = 0$, $c_2 = {}^2\!/\!_3$ sowie den Gewichten $b_1 = {}^1\!/\!_4$, $b_2 = {}^3\!/\!_4$ erfüllt also die 1., 2. und 3. Ordnungsbedingung, nicht jedoch die 4. Ordnungsbedingung. Ihre maximale Ordnung ist also $p = 3$.

Anmerkungen: Da $c_1 = 0$ kann es sich nicht um die Gauß-QF handeln. Somit können wir nicht Ordnung $p = 4$ erreichen.

Bei der Suche nach den Gewichten hätte man alternativ auch das folgende LGS lösen können:

$$\begin{pmatrix} c_1^0 & c_2^0 \\ c_1^1 & c_2^1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ {}^1\!/\!_2 \end{pmatrix} \tag{68}$$