Aufgabe 1

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ -41 \\ -15 \end{pmatrix}$$

LR-Zerlegung:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{(1)} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{20}{3} & 6 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{(3)} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{20}{3} & 6 \\ 0 & \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$L^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(4)} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{20}{3} & 6 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} =: R \tag{5}$$

Es gilt nun:

$$P := P^{(3)} \cdot P^{(1)} \tag{6}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$L^{(4)} \cdot P^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot P^{(1)} \cdot A = R \tag{9}$$

$$L^{-1} = L^{(4)} \cdot \hat{L_1} \tag{10}$$

$$\hat{L_1} = P^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot (P^{(3)})^{-1} \tag{11}$$

$$= P^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot P^{(3)} \tag{12}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$L = (L^{(4)} \cdot \hat{L}_1)^{-1} \tag{14}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Überprüfung mit Wolfram|Alpha.

Aufgabe 2

Zeige die Aussage für 2×2 Matrizen durch Gauß-en mit Spaltenpivotwahl.

Begründe, warum sich die Situation für größere Matrizen nicht ändert. TODO: Ausführlicher beschreiben!

Aufgabe 3

Teilaufgabe i

relativer Fehler:

$$\frac{|\frac{x}{y} - \frac{x\cdot(1+\epsilon_x)}{y\cdot(1+\epsilon_y}|}{|\frac{x}{y}|} = \ldots = |\frac{\epsilon_y - \epsilon_x}{1+\epsilon_y}| \leq \frac{|\epsilon_y| + |\epsilon_x|}{|1+\epsilon_y|} \leq \frac{2\cdot \text{eps}}{|1+\epsilon_y|} \tag{16}$$

Der letzte Ausdruck ist ungefähr gleich $2 \cdot \text{eps}$, da $1 + \epsilon_y$ ungefähr gleich 1 ist. Also: Der relative Fehler kann sich maximal verdoppeln.

Teilaufgabe ii

Die zweite Formel ist vorzuziehen, also $f(x) = -\ln(x + \sqrt{x^2-1})$, da es bei Subtraktion zweier annähernd gleich-großer Zahlen zur Stellenauslöschung kommt. Bei der ersten Formel, also $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2-1})$, tritt genau dieses Problem auf: x und $\sqrt{x^2-1}$ sind für große x ungefähr gleich groß.
Bei der zweiten Formel tritt das Problem nicht auf: x ist positiv und $\sqrt{x^2-1}$ auch, also gibt es in dem Ausdruck keine Subtraktion zweier annähernd gleich-großer Zahlen.

Aufgabe 4

TODO

Aufgabe 5

TODO