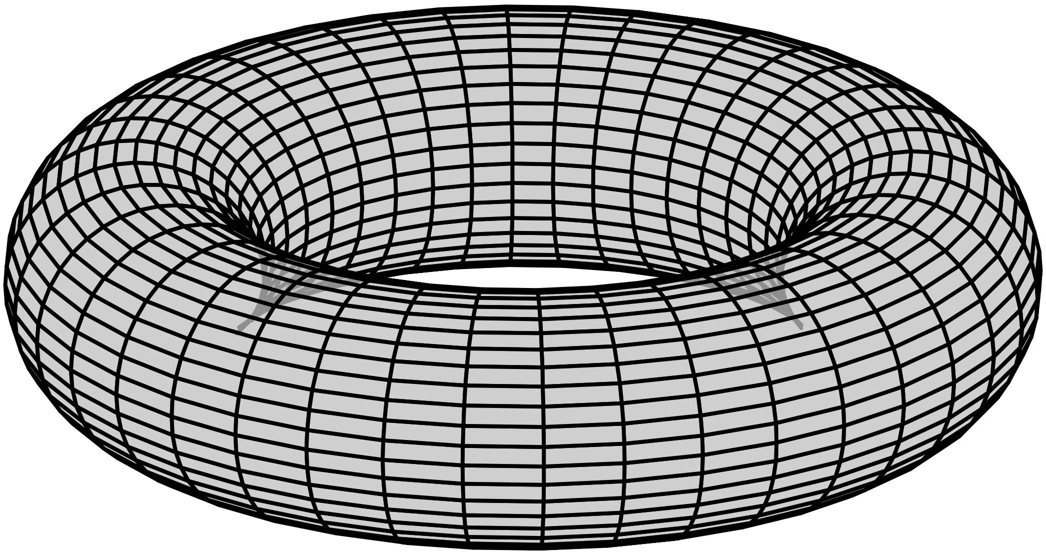
Geometrie und Topologie



Siehe GitHub

27. Oktober 2013

Vorwort

Dieses Skript wird/wurde im Wintersemester 2013/2014 geschrieben. Es beinhaltet Vorlesungsnotizen von Studenten zur Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich.

Es darf jeder gerne Verbesserungen einbringen!

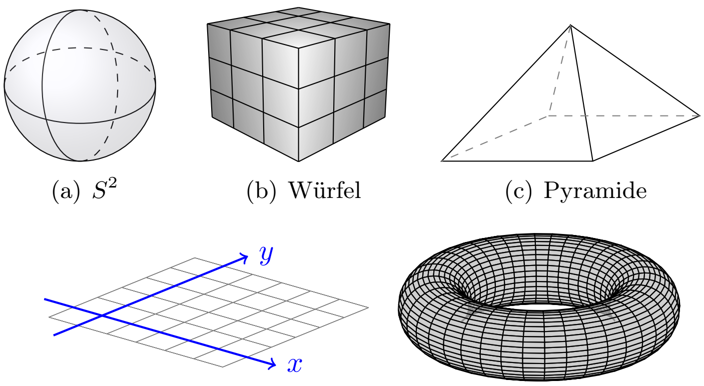
Die Kurz-URL des Projekts lautet tinyurl.com/GeoTopo.

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Grundbegriffe

1.1 Vorgeplänkel

Die Kugeloberfläche S^2 lässt sich durch strecken, stauchen und umformen zur Würfeloberfläche oder der Oberfläche einer Pyramide verformen, aber nicht zum $\mathbb{R}^2$ oder zu einem Torus. Für den $\mathbb{R}^2$ müsste man die Oberfläche unendlich ausdehnen und für einen Torus müsste man ein Loch machen.



(a) S^2 (b) Würfel (c) Pyramide

(d) $\mathbb{R}^2$ (e) Torus

Abbildung 1.1: Beispiele für verschiedene Formen

1.2 Topologische Räume

Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathfrak{T})$ bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

(ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$

(iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen **offene Teilmengen** von X.

$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B. $[0, 1)$. Auch gibt es Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

Beispiel 1

1) $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik.

   $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Leftrightarrow$ für jedes $x \in U$ gibt es $r > 0$, sodass $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) < r \} \subseteq U$
   Also: $\mathfrak{T} = \{ M \subseteq X \mid M$ ist offene Kugel $\}$

2) Allgemeiner: (X,d) metrischer Raum

3) X Menge, $\mathfrak{T} = \{ \emptyset, X \}$ heißt „triviale Topologie“

4) X Menge, $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$ heißt „diskrete Topologie“

5) $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset \}$ heißt „Zariski-Topologie“
   Beobachtung: $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X]$, sodass $\mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$

6) $X := \mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_Z = \{U \subseteq \mathbb{R}^n |$Es gibt Polynome $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ sodass $\mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \ldots, f_r)\}$

7) $X = \{ 0, 1 \}, \mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0 \} \}$
   abgeschlossene Mengen: $\emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 1 \}$

Definition 2

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x, wenn es ein $U_0 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U$.

Definition 3

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

a) $M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \} = \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$ heißt **Inneres** oder **offener Kern** von M.

b) $\overline{M} := \bigcap\limits_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von M.

c) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von M.

d) M heißt **dicht** in X, wenn $\overline{M} = X$ ist.

Beispiel 2

1) $X = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie
   $M = \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}, \quad M^\circ = \emptyset$

2) $X = \mathbb{R}$, $M = (a,b) \Rightarrow \overline{M} = [a,b]$

3) $X = \mathbb{R}, \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$
   $M = (a,b) \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}$

Definition 4

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

a) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathfrak{T}$, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist.

b) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Subbasis**, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von endlich vielen Durchschnitten von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist.

Beispiel 3

Gegeben sei $X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Topologie $\mathfrak{T}$. Dann ist

$$\mathfrak{B} = \{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n \}$$

ist eine abzählbare Basis von $\mathfrak{T}$.

Bemerkung 1

Sei X eine Menge und $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathfrak{T}$ auf X, für die $\mathfrak{B}$ Subbasis ist.

Definition 5

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$.
$\mathfrak{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \}$ ist eine Topologie auf Y.

$\mathfrak{T}_Y$ heißt **Spurtopologie** und $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ heißt ein **Teilraum** von $(X, \mathfrak{T})$

Definition 6

Seien X_1, X_2 topologische Räume.
$U \subseteq X_1 \times X_2$ sei offen, wenn es zu jedem $x = (x_1, x_2) \in U$ Umgebungen U_i um x_i mit $i = 1, 2$ gibt, sodass $U_1 \times U_2 \subseteq U$ gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times X_2$. Sie heißt **Produkttopologie**.
$\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$ ist eine Basis von $\mathfrak{T}$.

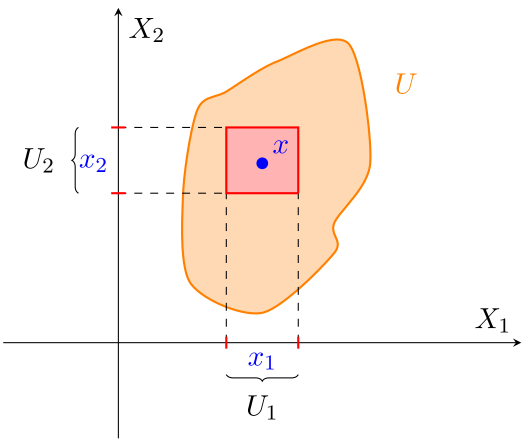


Abbildung 1.2: Zu $x = (x_1, x_2)$ gibt es Umgebungen U_1, U_2 mit $U_1 \times U_2 \subseteq U$

Beispiel 4

1) $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie.
$\Rightarrow$ Die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ stimmt mit der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$ überein.

2) $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ mit Zariski-Topologie. $\mathfrak{T}$ Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2$: $U_1 \times U_2$
(Siehe Abb. 1.3)

Definition 7

Sei X topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, $\overline{X} = X/_\sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : x \to \overline{x}, \quad x \mapsto [x]_\sim$, $U \subseteq \overline{X}$ heißt offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist. Dadurch wird eine Topologie auf $\overline{X}$ definiert. Diese Topologie heißt **Quotiententopologie**.

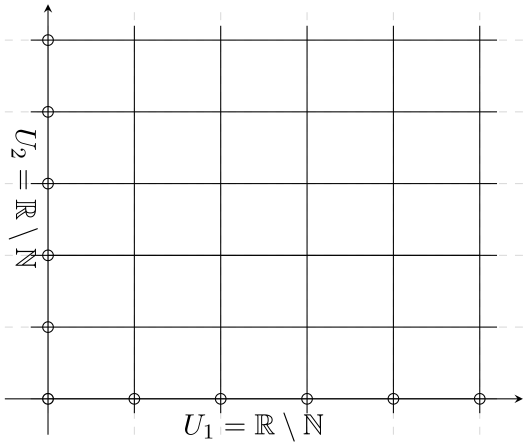
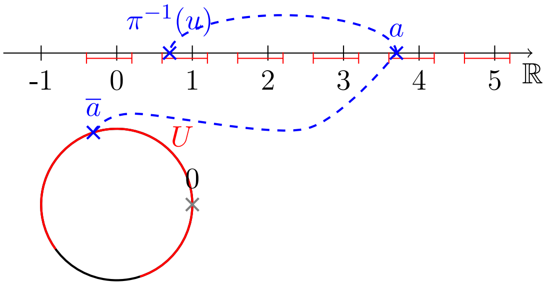


Abbildung 1.3: Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}^2$

Beispiel 5

$X = \mathbb{R}, a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$



$0 \sim 1$, d. h. $[0] = [1]$

Beispiel 6

$$X = \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$$
$$y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$$

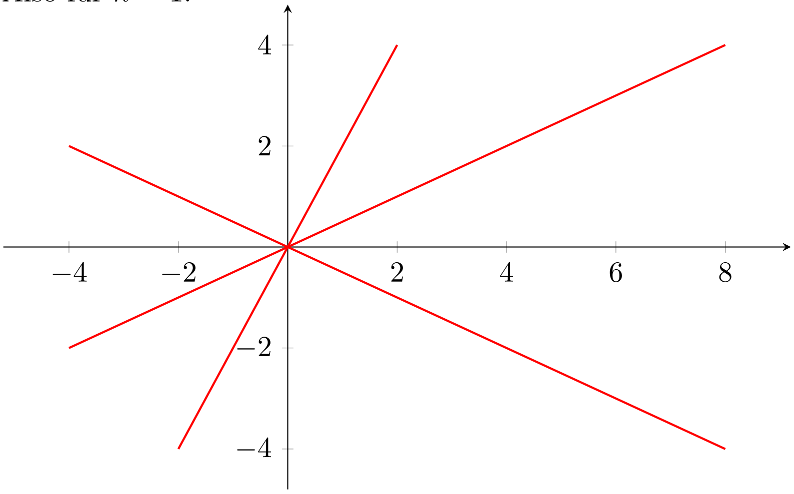
$X/_\sim$ ist ein Torus.

Beispiel 7

$$X = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{ 0 \}, x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x$$
$$\Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ liegen auf der gleichen Ursprungsgerade}$$

$$\overline{X} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

Also für $n = 1$:



1.3 Metrische Räume

Definition 8

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik**, wenn gilt:

(i) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(x + z)$

Das Paar (X, d) heißt ein **metrischer Raum**.

Bemerkung 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum und

$$\mathfrak{B}_r(x) := \{\, y \in X \mid d(x, y) < r \,\} \text{ für } x \in X, r \in \mathbb{R}^+$$

$\mathfrak{B}$ ist Basis einer Topologie auf X.

Beispiel 8

Sei V ein euklidischer oder hermiteischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann wird V durch $d(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ zum metrischen Raum.

Beispiel 9 (diskrete Metrik)

Sei X eine Menge. Dann heißt

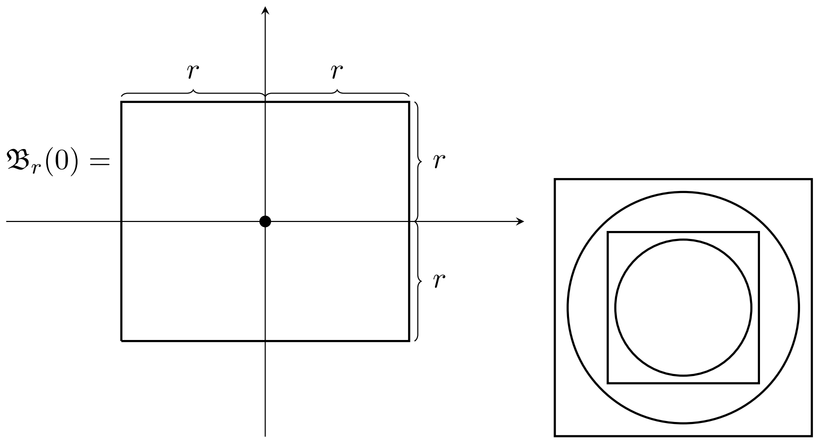
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

die **diskrete Metrik**. Die Metrik d induziert die **diskrete Topologie**.

Beispiel 10

$X = \mathbb{R}^2$ und $d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) := \max(\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|)$ ist Metrik.

Beobachtung: d erzeugt die eukldische Topologie.

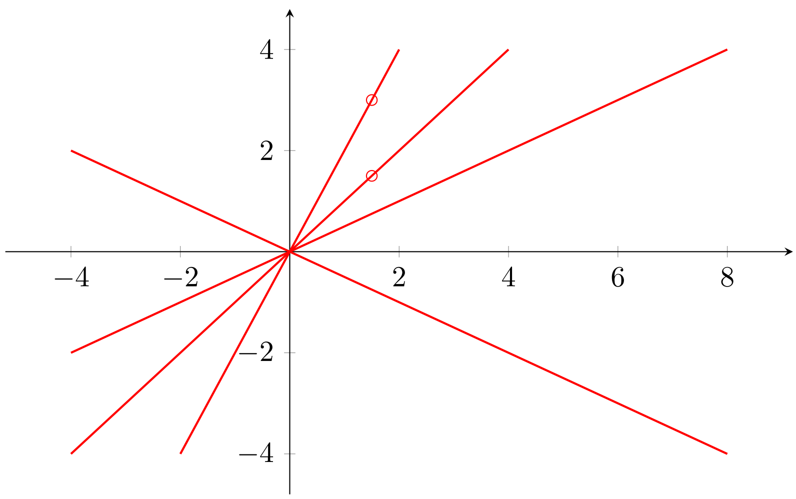


(a) $\mathfrak{B}_r(0)$ (b) Euklidische Topologie

Abbildung 1.4: Veranschaulichungen zur Metrik d

Beispiel 11 (SNCF-Metrik[1])

$X = \mathbb{R}^2$



Definition 9

Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte $x \neq y$ in X Umgebungen U_x um x und U_y um y gibt, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Bemerkung 3

Metrische Räume sind hausdorffsch, da

$$d(x, y) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon : \mathfrak{B}_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$$

Ein Beispiel für einen topologischen Raum, der nicht hausdorfsch ist, ist $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z)$.

Bemerkung 4

Seien X, X_1, X_2 Hausdorff-Räume.

a) Jeder Teilraum um X ist Hausdorffsch.

b) $X_1 \times X_2$ ist Hausdorffsch.

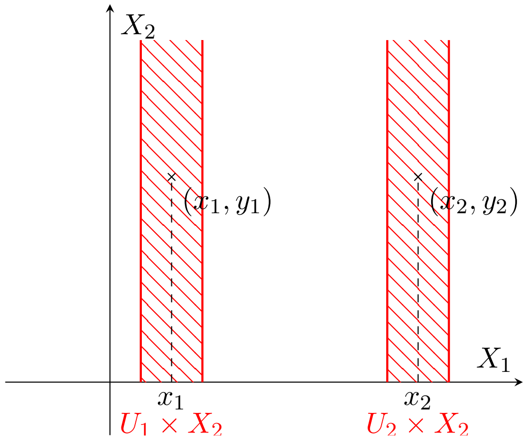


Abbildung 1.5: Wenn X_1, X_2 hausdorffsch sind, dann auch $X_1 \times X_2$

Symbolverzeichnis

$\mathfrak{B}$ Basis einer Topologie.

$\mathfrak{T}$ Topologie.

$\mathbb{Z}$ Ganze Zahlen.

$\mathbb{Q}$ Rationale Zahlen.

$\mathbb{R}$ Reele Zahlen.

$\mathbb{R}^\times$ Multiplikative Einheitengruppe von $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^+$ Echt positive reele Zahlen.

$\mathbb{P}$ Projektion.

$\overline{M}$ Abschluss der Menge M.

M° Inneres der Menge M.

∂M Rand der Menge M.

$A \times B$ Kreuzprodukt zweier Mengen.

$\mathcal{P}(M)$ Potenzmenge von M.

$A \setminus B$ A ohne B.

$A \subseteq B$ Teilmengenbeziehung.

$A \subsetneq B$ echte Teilmengenbeziehung.

$[x]_\sim$ Äquivalenzklassen von x bzgl. $\sim$.

$X/_\sim$ X modulo $\sim$.

$\|x\|$ Norm von x.

$|x|$ Betrag von x.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt.

Index