Aufgabe 1

Teilaufgabe a

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotwahl

Lösung:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & 15 & 13 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \quad \cdot(-\frac{1}{3}) \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 6 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ + \end{matrix}$$

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$L^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot \underbrace{P^{(1)}}_{=:P} \cdot A^0 = \underbrace{A^{(3)}}_{=:R} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow PA = (L^{(3)} \cdot L^{(2)})^{-1} \cdot R \tag{2}$$

$$\Rightarrow L = (L^{(3)} \cdot L^{(2)})^{-1} \tag{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Nun gilt: $PA = LR = A^{(1)}$ (Kontrolle mit Wolfram|Alpha)

Teilaufgabe b

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 12 \\ 4 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: A auf positive Definitheit untersuchen, ohne Eigenwerte zu berechnen.

Vorüberlegung: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv Definit ...

$$\begin{aligned} \ldots &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T Ax > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Alle Eigenwerte sind größer als 0} \end{aligned}$$

Falls A symmetrisch ist, gilt:

A ist pos. Definit $\Leftrightarrow$ alle führenden Hauptminore von A sind positiv

$\Leftrightarrow$ es gibt eine Cholesky-Zerlegung $A = GG^T$ mit G ist reguläre untere Dreiecksmatrix

Lösung 1: Hauptminor-Kriterium

$$\det(A_1) = 9 > 0 \tag{5}$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 16 < 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht positiv definit} \tag{7}$$

Lösung 2: Cholesky-Zerlegung

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 3 \tag{8}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{4}{3} \tag{9}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{12}{3} = 4 \tag{10}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{21} - {l_{21}}^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{16}{9}} = \sqrt{-\frac{4}{9}} \notin \mathbb{R} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \text{Es ex. keine Cholesky-Zerlegung, aber } A \text{ ist symmetrisch} \tag{12}$$

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht pos. Definit} \tag{13}$$

Aufgabe 2

Teilaufgabe a

Aufgabe Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode zum Lösen des Gleichungssystems

$$Ly = b,$$

wobei L eine invertierbare, untere Dreiecksmatrix ist.

Geben Sie die Formel zur Berechnung von y_i an.

Lösung:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k}{l_{ii}}$$

Algorithm 1 Calculate y in $Ly = b$

Require: Lower, invertable, triangular Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Vektor b

```
procedure SOLVE(L, b)
    for i ∈ { 1, . . . n } do
        y_i ← b_i
        for k ∈ { 1, . . . , i − 1 } do
            y_i ← y_i − l_ik · y_k
        end for
        y_i ← y_i / l_ii
    end for
end procedure
```

Teilaufgabe b

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LRx = Pb$$

Algorithm 2 Löse ein LGS $Ax = b$

Require: Matrix A, Vektor b

```
procedure LOESELGS(A, b)
    P, L, R ← LRZER(A)
    b* ← Pb
    c ← VORSUB(L, b*)
    x ← RUECKSUB(R, c)
    return x
end procedure
```

Teilaufgabe c

Der Gesamtaufwand ist:

- LR-Zerlegung, $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n^2$
- Vektormultiplikation, $2n$
- Vorwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$
- Rückwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$

Aufgabe 3

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix}$$

Und jetzt die Berechnung

$$f'(x,y) \cdot (x_0, y_0) = f(x,y)$$

LR-Zerlegung für $f'(x,y)$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 0 & e^y - x^2 \cos y \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$P = I_2 \tag{16}$$

$$-f(\frac{-1}{3}, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{27} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{27} \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{27} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Aufgabe 4

Aufgabe 5

Teilaufgabe a

Die Ordnung n einer Quadraturformel gibt an, dass diese Polynome bis zum Grad $\leq n-1$ exakt löst.

Teilaufgabe b

Teilaufgabe c