Aufgabe 1

Teilaufgabe a)

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe b)

Gesucht: $\det(A)$

Sei $P \cdot L = L \cdot R$, die gewohnte LR-Zerlegung.

Dann gilt:

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(R) / \det(P)$$

$\det(L) = 1$, da alle Diagonalelemente 1 sind und es sich um eine untere Dreiecksmatrix handelt.

$\det(R) = r_{11} \cdot \ldots \cdot r_{nn}$ da es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt.

$\det(P) = 1$ oder -1

Das Verfahren ist also:

1. Berechne Restmatrix R mit dem Gaußverfahren.
2. Multipliziere die Diagonalelemente von R
3. falls die Anzahl an Zeilenvertauschungen ungerade ist negiere das Produkt aus 2 (eine Zeilenvertauschung verändert lediglich das Vorzeichen und P ist durch Zeilenvertauschungen aus der Einheitsmatrix hervorgegangen)

Aufgabe 2

Teilaufgabe a)

Formel: $y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} y_j \cdot l_{ij}}{l_{ii}}$

Anmerkung: l_{ii} kann nicht 0 sein, da L dann nicht mehr invertierbar wäre.

Algorithmus:

Algorithm 1 TODO

```
for i = 1 to i = n do
    sum ← 0
    for j = 1 to j = i − 1 do
        sum ← sum + y_i · l_ij
    end for
    y_i ← (b_i − sum) / l_ii
end for
```

(b)

Algorithm 2 Löse ein LGS $Ax = b$

```
Require: Matrix A, Vektor b
  procedure LoeseLGS(A, b)
      P, L, R ← LRZer(A)
      b* ← P · b
      c ← VorSub(L, b*)
      x ← RueckSub(R, c)
      return x
  end procedure
```

Teilaufgabe c)

Aufwand:

- Vorwärts-/Rückwärtssubstitution: jeweils $\frac{1}{2} \cdot n^2$
- LR-Zerlegung: $\frac{1}{3}n^3$
- gesamt: $\frac{1}{3}n^3 + n^2$

Aufgabe 3

Teilaufgabe a)

$$L_0(x) = -\frac{1}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x) \tag{1}$$
$$L_1(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 - 2x^2 - x + 2) \tag{2}$$
$$L_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^3 - x^2 - 2x) \tag{3}$$
$$L_3(x) = \frac{1}{6} \cdot (x^3 - x) \tag{4}$$

Damit ergibt sich:

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \tag{5}$$

Anmerkung: Es ist in der Klausur allerdings nicht notwendig die Monomdarstellung zu berechnen außer es wird explizit verlangt. (Das spart viel Zeit)

Teilaufgabe b)

Zunächst die dividierten Differenzen berechnen:

$$f[x_0] = 7, \qquad f[x_1] = 1, \qquad f[x_2] = -1, \qquad f[x_3] = 7 \tag{6}$$
$$f[x_0, x_1] = -6, \qquad f[x_1, x_2] = -2, \qquad f[x_2, x_3] = 8 \tag{7}$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = 2, \qquad f[x_1, x_2, x_3] = 5 \tag{8}$$
$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1 \tag{9}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$p(x) = 7 - (x + 1) \cdot 6 + (x + 1) \cdot x \cdot 2 + (x + 1) \cdot x \cdot (x - 1) \tag{10}$$

Aufgabe 4

Teilaufgabe a)

1. Ordnung 3 kann durch geschickte Gewichtswahl erzwungen werden.
2. Ordnung 4 ist automatisch gegeben, da die QF symmetrisch sein soll.
3. Aufgrund der Symmetrie gilt Äquivalenz zwischen Ordnung 5 und 6. Denn eine hätte die QF Ordnung 5, so wäre wegen der Symmetrie Ordnung 6 direkt gegeben. Ordnung 6 wäre aber bei der Quadraturformel mit 3 Knoten das Maximum, was nur mit der Gauß-QF erreicht werden kann. Da aber $c_1 = 0$ gilt, kann es sich hier nicht um die Gauß-QF handeln. Wegen erwähnter Äquivalenz kann die QF auch nicht Ordnung 5 haben.

Da $c_1 = 0$ gilt, muss $c_3 = 1$ sein (Symmetrie). Und dann muss $c_2 = \frac{1}{2}$ sein. Es müssen nun die Gewichte bestimmt werden um Ordnung 3 zu garantieren mit:

$$b_i = \int_0^1 L_i(x)\mathrm{d}x \tag{11}$$
$$b_1 = \frac{1}{6}, \tag{12}$$
$$b_2 = \frac{4}{6}, \tag{13}$$
$$b_3 = \frac{1}{6} \tag{14}$$

Teilaufgabe b)

Als erstes ist festzustellen, dass es sich hier um die Simpsonregel handelt und die QF

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a) \cdot \frac{1}{6} \cdot \Big(f(a) + 4 \cdot f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\Big) \tag{15}$$

ist. Wenn diese nun auf N Intervalle aufgepflittet wird gilt folgendes:

$$h = \frac{(b-a)}{N} \tag{16}$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = h \cdot \frac{1}{6} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} f(a + i \cdot h) + 4 \cdot \sum_{l=0}^{N-1} f(a + \frac{1}{2} \cdot h + l \cdot h)\right] \tag{17}$$

$\sum_{i=1}^{N-1} f(a + i \cdot h)$ steht für die Grenzknoten (deshalb werden sie doppelt gezählt). Von den Grenzknoten gibt es insgesamt $N - 2$ Stück, da die tatsächlichen Integralgrenzen a und b nur einmal in die Berechnung mit einfließen.

$\sum_{l=0}^{N-1} f(a + \frac{1}{2} \cdot h + l \cdot h)$ sind die jeweiligen mittleren Knoten der Intervalle. Davon gibt es N Stück.

Teilaufgabe c)

TODO

Aufgabe 5

Zunächst ist nach der Familie von Quadraturformeln gefragt, für die gilt: ($p :=$ Ordnung der QF)

$$s = 3 \tag{18}$$
$$0 = c_1 < c_2 < c_3 \tag{19}$$
$$p \geq 4 \tag{20}$$

Nach Satz 29 sind in der Familie genau die QFs, für die gilt:
Für alle Polynome $g(x)$ mit Grad ≤ 0 gilt:

$$\int_0^1 M(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{21}$$

Es gilt $g(x) = c$ für eine Konstante c, da der Grad von $g(x)$ 0 ist. Also ist 21 gleichbedeutend mit:

$$\int_0^1 M(x) \cdot c\mathrm{d}x = 0 \tag{22}$$
$$\Leftrightarrow c \cdot \int_0^1 M(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{23}$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 M(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{24}$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\mathrm{d}x = 0 \tag{25}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot (c_2 + c_3) + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot c_3 = 0 \tag{26}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot c_3}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot c_3} = c_2 \tag{27}$$

Natürlich müssen auch die Gewichte optimal gewählt werden. Dafür wird Satz 28 genutzt:
Sei $b^T = (b_1, b_2, b_3)$ der Gewichtsvektor. Sei zudem $C := \begin{pmatrix} {c_1}^0 & {c_2}^0 & {c_3}^0 \\ {c_1}^1 & {c_2}^1 & {c_3}^1 \\ {c_1}^2 & {c_2}^2 & {c_3}^2 \end{pmatrix}$.

Dann gilt: C ist invertierbar und $b = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Es gibt genau eine symmetrische QF in der Familie. Begründung:
Aus $c_1 = 0$ folgt, dass $c_3 = 0$ ist. Außerdem muss $c_2 = \frac{1}{2}$ sein. Also sind die Knoten festgelegt. Da wir die Ordnung $\geq s = 3$ fordern, sind auch die Gewichte eindeutig.
Es handelt sich um die aus der Vorlesung bekannte Simpsonregel.